

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta technologická ve Zlíně

Katedra fyziky a materiálového inženýrství

Prostorové teselace

Teze k rigorózní zkoušce

září 1998

doktorand : **RNDr. Petr Ponížil**
školicel : **RNDr. Ivan Saxl, DrSc.**

Obsah

1 Úvod	3
1.1 Historie a použití.....	3
1.2 Základní vlastnosti.....	6
1.3 Charakteristiky konvexních teselací.....	7
2 Bodové procesy	9
2.1 Definice.....	9
2.2 Základní typy bodových procesů	9
2.3 Shlukové procesy.....	10
3 Modely teselací	13
3.1 Pravidelné teselace	13
3.2 Náhodné teselace	13
3.2.1 Poissonova teselace.....	13
3.2.2 Delaunayova teselace	14
3.2.3 Johnsonova-Mehlova teselace	14
3.2.4 Indukované teselace	15
3.2.4.1 Rovinná teselace indukovaná prostorovou teselací.....	15
3.2.4.2 Čárová teselace indukovaná prostorovou teselací.....	15
3.2.5 Voronoiovy teselace.....	16
3.2.5.1 Poissonova-Voronoiova teselace	16
3.2.5.2 Teselace generovaná Booksteinovým modelem	17
3.2.5.3 Teselace generované shlukovými poli	17
4 Vlastnosti Voronoiových teselací	19
4.1 Globální vlastnosti Poissonovy-Voronoiovy teselace.....	19
4.2 Vlastnosti buněk Poissonovy-Voronoiovy teselace	20
4.3 Vlastnosti Voronoiových teselací shlukových polí a jiných bodových procesů.....	21
4.4 Praktické využití Voronoiových teselací.....	21
5 Konstrukce Voronoiových teselací a výběrů z nich	24
5.1 Inkrementální algoritmus	24
5.2 Dělicí algoritmus	25
5.3 „Plane sweep“ algoritmus	25
5.4 Algoritmy pro vícerozměrné teselace.....	25
5.5 Konstrukce výběrů z neomezených teselací, korekce na okrajové jevy	26
6 Použitá literatura	27
7 Dodatky	33
7.1 Seznam vybraných symbolů	33
7.2 Často používané pojmy	34

1 Úvod

1.1 Historie a použití

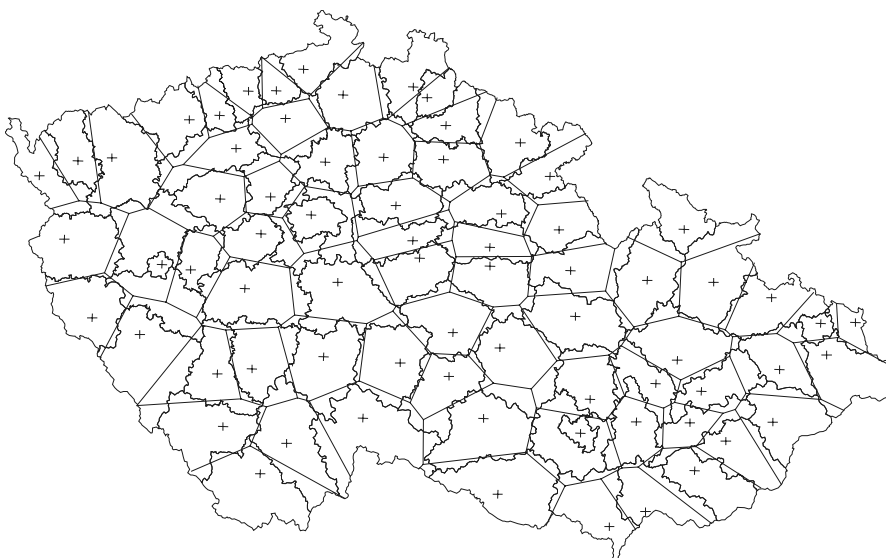
V přírodních i společenských vědách existuje mnoho oborů, které řeší problém členění prostoru na oblasti. S tímto problémem se lze setkat např. při:

- ◆ studiu struktury vesmíru v astronomii
- ◆ optimalizaci rozložení center správy a obsluhy v oblastech (města, okresy, státy)
- ◆ zjišťování organizace výživy živočišných a rostlinných tkání
- ◆ rozpoznávání a ovlivňování mikrostruktury v živé a neživé přírodě
- ◆ studiu rozložení živočišných revírů, sídlišť a ekologických nik.

Ve všech těchto oblastech existuje konečná množina center, jimž je přiřazena jistá část prostoru. Výsledkem je rozdělení prostoru na systém oblastí – buněk či cel, vesměs téměř nebo úplně vyplňujících prostor a majících společné nejvýše své hranice. V tomto druhém případě dělení nazýváme *teselací* (v rovině také *mozaikou*).

Nejjednodušší přirozené dělení je založeno na vzdálenostech bodů prostoru od center. Vnitřek buňky je pak vytvořen těmi body prostoru, které mají k danému centru blíže než k centrům jiným; hranice buňky jsou tvořeny body, které jsou stejně vzdáleny od více center – obr.1. Vzdálenosti nemusí nutně být eukleidovské (např. při popisu obslužnosti v sídlišti s pravoúhlým systémem ulic), centra nemusí být bodová (např. u buněk - povodí řek). Eukleidovské vzdálenosti nad bodovými centry generují (obyčejnou) Voronoiovu teselaci, v obecnějších případech se jedná o zobecněnou Voronoiovu teselaci.

Poprvé se myšlenka výše popsaného dělení prostoru vyskytla v roce 1644 v Descartesově práci „Le Monde de Mr Descartes, ou Le Traité de la Lumière“, ve které se autor zabýval uspořádáním hmoty ve Sluneční soustavě. Její podrobnější zpracování uskutečnili při studiu pozitivně definitních kvadratických ploch Dirichlet (1850) ve dvou- a třírozměrném případě a Voronoi (1908) v d -rozměrném případě. Odtud se pro Voronoiovu teselaci objevují termíny *Dirichletova mozaika* či *Voronoiův diagram*.



Obr. 1 Územně-správní členění České republiky a Voronoiova teselace vytvořená generátory umístěnými v okresních městech.

Velmi brzy byly Voronoiovy teselace použity v krystalografii (Niggli, 1927), Wignerem a Seitzem (1933) ve fyzikální chemii (odtud termín *Wignerovy-Seitzovy buňky*

používaný ve fyzice) a Thiessenem (1911); odtud termín *Thiessenovy polygony* v meteorologii a geografii.

Vzhledem k tomu, že Voronoiovy teselace byly „objeveny“ mnohokrát nezávisle na sobě, můžeme se setkat i s pojmem *potenciálně využitelná plocha*, který zavedl Brown (1965) jako přirozenou oblast výživy stromů, nebo *kapilární doména*, kterou zavedl Hoofd (1985) při studiu rozložení kapilár v řezu tkáně zásobované krví a také *oblast vlivu* v automatické obrazové analýze při zavádění exoskeletu (Serra, 1982).

Od poloviny století začalo širší využívání Voronoiových teselací i v sociálních a ekonomických vědách, zpočátku úzce navazující na Hotellingovu (1929) práci z konce dvacátých let. Od sedmdesátých let tohoto století je možné sledovat stále širší použití Voronoiových mozaik v počítačové grafice a zároveň rozsáhlé studium jejich vlastností počítačovými simulacemi. V poslední době se objevují i práce využívající teselací při popisu sférolitů v polymerech (Huang, 1998). Publikovány byly již speciální monografie věnované teselacím (Okabe et al., 1992; Møller, 1994), případně jsou jim věnovány samostatné kapitoly v knihách věnovaných konvexní geometrii (Gruber & Wills, 1993), stochastické geometrii (Stoyan et al., 1995; Mecke et al., 1990; Saxl et al., 1995) a obrazové analýze (Serra, 1982).

Společnou vlastností většiny uvedených příkladů využití teselací je, že se v nich nějakým způsobem uplatňují transportní jevy v nejširším slova smyslu. Právě pro ně jsou teselace založené na pojmu vzdálenosti bodů prostoru od center (nejen bodových) vhodným metodickým prostředkem, neboť poskytují soubornou informaci o zadané třídě cest, po nichž k transportu může docházet, případně - při jejím vhodném výběru - skutečně dochází. V řadě případů pak formálně zavedená teselace s větší či menší přesností odpovídá teselaci skutečné (viz obr. 1); případné rozdíly mohou být vyhodnoceny a stav optimalizován změnou hranic reálných oblastí (např. z obr. 1 je patrné, že občané severovýchodní a jihovýchodní části okresu Aš mají blíže do Chebu, než do svého okresního města). Při řešení problémů optimální obslužnosti lze naopak měnit polohu center (prodejny, školy, zdravotní střediska aj.) tak, aby jim odpovídající cely měly podobnou velikost i tvar. Další příklady tohoto typu využití teselací (ekonomické soutěžení) jsou uvedeny v odst. 4.4.

Živá i neživá příroda je plná reálných teselací, tedy dobře definovaných a pozorovatelných cel oddělených skutečnými hranicemi. Přitom teselace tvořené buňkami živých tkání jsou zřetelně optimalizované - mají velmi podobné tvary i rozměry a jejich prostorové uspořádání je pravidelné. Naproti tomu zrna polykrystalických materiálů, která jsou produkty fázových přechodů uskutečňujících se růstovou aktivitou nukleačních center, mají značnou tvarovou i rozměrovou variabilitu, která odráží nepravidelné prostorové rozmístění zárodků i možnou lokální variaci růstových podmínek.

Rozložení center v prostoru je tedy výchozí charakteristikou modelů teselací v přírodních i umělých materiálech a jeho různým variantám je třeba věnovat patřičnou pozornost. Proto je kap. 2 věnována modelům rozmístění bodových systémů v prostoru - *bodovým procesům*. Centra mohou být rozmístěna homogenně - v matematické terminologii to znamená *navzájem nezávisle* v „prázdném“ eukleidovském prostoru a *Poissonův bodový proces* je odpovídajícím modelem. Heterogenní prostorové rozmístění bodů - center - může být jednak důsledkem vzájemné interakce center (přitažlivé a proto vytvářející shluky - *shluková pole* - nebo odpudivé a proto zdola omezující vzdálenost sousedních center - *modely s pevným jádrem*), interakce center s prostorovými jevy odlišného charakteru (povrch, fázová rozhraní) nebo důsledkem proměnlivého vnějšího pole (teplotní či koncentrační gradienty). Ideální bodová rozmístění a tedy i jim odpovídající teselace prostoru jsou pravidelné: body tvoří translační mřížku a všechny cely jsou stejně velké a stejně orientovány: V reálných situacích se tento případ sice nikdy nevyskytuje, často je však žádoucí se mu co nejvíce přiblížit (např. rozložením zpevňující fáze v kompozitech). Má tedy smysl studovat i mřížkové systémy či systémy jim blízké (*Booksteinův model* a jim generovaná teselace).

Především pro využití v materiálové oblasti jsou konstruovány růstové modely teselací, zavedené v odst. 1.2 a široce aplikovatelné pro popis kovových polykrystalů. Jejich jednotlivá růstová stadia (*neúplné teselace*) jsou ovšem využitelné i pro popis růstových stadií fází ve všech typech materiálů (sférolitické domény v tenkých polymerních vrstvách - Huang, 1998). Vyhledem k úzké souvislosti teselací se sférickou kontaktní vzdáleností (odst. 1.2) jich lze využít i pro výrazné zjednodušení při modelování transportních podmínek v kompozitních materiálech (např. Pelikán et al. (1995a,b) nahrazují náhodné rozmístění vláken *pravidelnou* mřížkou vhodně modifikovaných vláken, při čemž rozdělení sférických drah v každé cele jimi generované *pravidelné* teselace je prakticky stejné jako v materiálu s náhodně rozmístěnými vlákny).

Nelze také opomenout využití teselací jako metody pro charakterizaci resp. klasifikaci reálných bodových systémů, např. referenčních bodů charakteristických prvků mikrostrukturních obrazů pořízených optickou či elektronovou mikroskopií, jako jsou profily či projekce zpevňujících disperzních částic, dislokační leptové důlky, důlky na snímcích lomových ploch atd. Vedle klasických postupů prostorové statistiky, jako je metoda čtverců, a metod stochastické geometrie (Stoyan et al., 1995; Saxl et al., 1995) poskytuje tzv. polygonální metoda rovněž velmi spolehlivé a bezprostředně interpretovatelné výsledky. Při jejím použití je studovaný bodový systém nahrazen jím generovanou teselací (obvykle Voronoiovou) a na základě jejích vlastností je provedena jeho klasifikace (viz např. Besterci et al., 1995). Proces růstu z nukleačních center je zřejmě ovlivněn jejich sousedy; v bodovém systému lze však obtížně určit, která sousední centra tento vliv skutečně uplatní. Huang (1998) navrhl za tyto sousedy považovat generátory sousedních Voronoiových cel dané Voronoiovy cely a zjistil „topologickou autokorelaci“; malé cely mají velké sousedy a naopak. Jedná se zřejmě o jistou analogii zákona Aboavova-Weaireova (odstavec 1.3) pro plochy.

Extrakce cel reálných třírozměrných (3D) teselací je velmi obtížná resp. většinou nemožná a při jejich pozorování jsme odkázáni na dvourozměrné (2D) řezy - profily, zviditelněné buď využitím fyzikálních rozdílů cel (pozorování v polarizovaném světle) nebo díky odlišným vlastnostem jejich hranic (selektivní leptání). Je tedy nezbytné vedle prostorových teselací studovat také teselace jimi *indukované* v rovině resp. na testovacích přímkách vedených v rovinách řezů. Statistické odhady vlastností 3D objektů z jejich 2D či 1D řezů a 2D projekcí tenkých vrstev jsou předmětem aplikované matematické disciplíny - *stereologie*. Její postupy použitelné pro teselace jsou rovněž zahrnuty do kap. 3.

Mimořádnou důležitost mají počítačové simulace, při nichž jsou souběžně konstruovány jak 3D teselace, tak i jejich náhodné 2D a 1D řezy. Pak je možné nalézt numerickou souvislost mezi experimentálně stanovitelnými 2D a 1D daty a charakteristikami 3D struktury, která je indukovala. Přehled dosud získaných dat (teoretických i stanovených pomocí simulací) pro Poissonovu-Voronoiovu teselaci i pro některé teselace složitější obsahuje kap. 4.

Charakteristiky teselací generovaných shlukovými poli a procesy s pevnými jádry jsou dosud málo známé; dílčí výsledky jsou rovněž připomenuty v kapitole 4, ale systematické zpracování a postihu vlivu parametrů shlukových polí (velikost, početnost a uspořádání shluku) zatím chybí. Proto lze postihnout pouze směr odchylky zkoumaného bodového systému či reálné teselace od homogenity reprezentované Poissonovým bodovým procesem a Poissonovou-Voronoiovou teselací. Pro přesnější přiřazení modelů dané reálné situaci je třeba shromáždit reprezentativní soubor simulacemi získaných dat.

Snahy postihnout souvislosti mezi strukturou a vlastnostmi, dominující zejména v oblasti kompozitních materiálů, nalézají v teselacích významnou metodickou pomoc. Patrně proto, že struktura je velmi komplexní jev, který nelze postihnout úzkým výběrem několika číselných charakteristik typu velikosti zrna či střední mezičásticové vzdálenosti. První z nich

je navíc obvykle nesprávně charakterizována počtem profilů na 2D či 1D indukovaných teselacích (přitom délka střední tětiny profilů neučuje počet zrn, ale jejich celkový povrch). Střední mezičásticová vzdálenost (Underwood, 1970) ve skutečnosti vůbec nezávisí na rozmístění částic ani na jejich počtu, nýbrž na jejich celkovém objemu a celkové velikosti povrchu. Ať již teselace charakterizují skutečně existující cely (zrna, magnetické domény či jiné oblasti s různými fyzikálními vlastnostmi) nebo popisují bodová centra disperzních částic, vždy odrážejí vztah strukturních prvků a prostoru, v němž jsou tyto rozmístěny (jinými slovy, prostorové jevy jsou reprezentovány opět prostorovými jevy při plném respektování jejich stochastické povahy). To je jejich hlavní přínos, který mají společný i s ostatními metodami stochastické geometrie. Na typu materiálu přitom nezáleží; důležité je pouze, zda má *prostorovou vnitřní strukturu*.

1.2 Základní vlastnosti

Formální definice cely V_i obyčejné Voronoiovy teselace generované konečným či spočetným bodovým systémem $P = \{x_1, \dots, x_n\}$ d -rozměrného eukleidovského prostoru, $2 \leq n < \infty$, $x_i \neq x_j$, $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$ je

$$V_i = \left\{ x \in \mathbf{R}^d, \|x - x_i\| \leq \|x - x_j\|, \text{ pro } j \neq i \right\},$$

kde $\|x\|$ je eukleidovská norma.

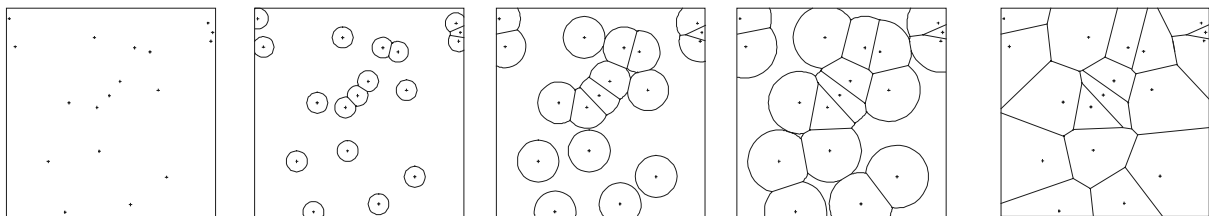
Sjednocení všech cel V_i je obyčejná Voronoiova teselace a P je množina generátorů. Takto definovaná Voronoiova cela je uzavřená množina a její vnitřek je definován stejnou rovnicí s ostrým znaménkem nerovnosti.

Voronoiovu teselaci můžeme vytvořit také následujícím způsobem: označme $E_+^d(x_i, x_j)$ poloprostor ohraničený nadrovinou symetrie bodů x_i, x_j obsahující bod x_i . Potom průnik všech těchto poloprostorů obsahujících bod x_i je cela Voronoiovy teselace

$$V_i = \bigcap_{j \neq i} E_+^d(x_i, x_j).$$

Třetí způsob generace Voronoiovy teselace z daného bodového systému je tzv. růstový model:

předpokládejme, že v čase $t = 0$ začnou ze zárodků x_i růst zrna konstantní izotropní rychlostí v . Při tom růst zrna se lokálně zastaví v každém bodě, v němž se sousední zrna dotknou. Takto vzniklá zrna opět vytvoří Voronoiovu teselaci; pokud by rychlost nebyla izotropní je to zobecněná Voronoiova teselace.



Obr. 2 Růstový model. Čas t roste zleva doprava. Vlevo $t=0$; vpravo $t=\infty$.

Jednotlivá stadia růstu, v nichž buňky ještě nevyplňují celý prostor, se nazývají *neúplné teselace* (Muche, 1993). Tyto mezistupně úzce souvisejí s důležitou charakteristikou prostorového rozmístění bodů systému P - sférickou kontaktní vzdáleností. Je definována v každém bodě $x \in \mathbf{R}^d$ jako $\sigma = \min(\|x - x_i\|, x_i \in P)$. Její distribuční funkce $F(x) = \mathbf{P}(\sigma \leq x)$ je rovna objemovému podílu neúplné teselace v čase $t=x/v$ (Muche, 1993; Saxl et al., 1995).

Další zobecnění dostaneme předpokladem, že okamžik začátku růstu je Poissonův bodový proces na kladné poloose – teselace vzniklá za platnosti doplňující podmínky, že zárodek obsažený v nějakém již rostoucím zrnu růst nezačne, se nazývá homogenní Johnsonova-Mehlova teselace (Møller, 1992, 1995). Její nehomogenní variantu dostaneme, když rychlost nukleace je nějakou funkcí (rozumí se klesající) času.

Nejjednoduššími Voronoiovými teselacemi jsou teselace pravidelné, jejichž všechny cely jsou translačně ekvivalentní. Jsou to například dílky měřítka (1D teselace s generátory ve středech dílků), čtvercová síť (2D teselace s generátory ve středech čtverců) a kubická teselace (3D teselace s generátory ve středech krychlí).

Informace obsažená v teselaci je velmi bohatá, i když řada jejích charakteristik spolu souvisí. Složky hranice cel se podle své dimenze $s = 0, \dots, d$ nazývají s -fasety, (např. 0-faseta je vrchol, 1-faseta je hrana a d -faseta je cela samotná). Když průnik dvou sousedních s -faset je s' -faseta dimenze $s' \leq s$, nazývá se *teselace regulární*. Jestliže každá s -faseta je společná $(d-s+1)$ celám, je *teselace normální*. Teselace generované některými pravidelnými bodovými mřížkami (např. kubická a čtvercová teselace) jsou regulární, avšak nikoli normální. V normální třírozměrné teselaci se ve vrcholu setkávají čtyři cely, v hraně tři cely a ve stěně cely dvě.

1.3 Charakteristiky konvexních teselací

V této práci se budeme zabývat převážně *konvexními teselacemi* (například Johnsonova-Mehlova teselace konvexní není), to jest teselacemi, tvořenými konvexními polytopy (úsečky, mnohoúhelníky, mnohostěny...) omezenými výše zavedenými s -fasetami. Ty jsou uzavřenými náhodnými množinami, jejichž distribuce $\mathbf{P}(\bullet_s)$ danou teselaci plně charakterizují. Řada charakteristik mezi sebou navzájem souvisí, a to buď přímo nebo mezi nimi existuje vysoká korelace. Pro regulární normální teselace se ustálil soubor charakteristik popisujících vlastnosti jednotlivých cel (Lorz & Hahn, 1993; Okabe et al., 1992); lze je rozdělit do tří skupin:

- 1) *rozměrové* – objem v , povrch s , obvod (celková délka hran) p , střední šířka (střední Feretův průměr) w v 3D; plocha v' a obvod s' (2D střední šířka $w' = s'/\pi$ pro všechny konvexní obrazce); délka v'' v 1D (obsah hranice $s''=2$ - počet koncových bodů úsečky). Zde i jinde používáme konvenci podle níž jsou analogické veličiny charakterizující fasety, tj. ty pro něž $k=d-s$ je stejné, značeny stejným jádrovým písmenem – např. v označuje vždy obsah cely. Počet čárek rovný $3-d$, $1 \leq d \leq 3$ charakterizuje dimenzi prostoru teselace. Podle dimenze s -faset, ke kterým se vztahují, jsou homogenními funkcemi stupně $-s/d$ měřítkových charakteristik, například intenzity generujícího procesu λ (viz odst.4.2). S ohledem na jejich homogenitu jsou proto jejich rozměrové charakteristiky obvykle uváděny pro jednotkovou intenzitu λ generujícího procesu anebo, což je totéž, pro střední objem $E v = 1$. Zvláštním typem rozměrových charakteristik jsou *globální* charakteristiky teselací (*intenzity měř*) $S_v = \lambda E s / 2$ (střední celková plocha hranic v jednotce objemu), $L_v = \lambda E p / 3$ (střední celková délka hran v jednotce objemu, vztah platí jen pro normální teselace).
- 2) *tvarové* – počty vrcholů, hran, ..., stěn. U 3D regulárních normálních teselací se obvykle uvádí pouze počet stěn n_f , protože počet vrcholů $n_v = 2(n_f - 2)$ a počet hran $n_e = 3(n_f - 2)$. V 2D teselacích je $n'_e = n'_v$ a samozřejmě $n''_v = 2$ v 1D. Další charakteristiky jsou dihedrální úhly, a to náhodný dihedrální úhel θ (v každé cele, resp. typické cele - Stoyan et al., (1995) - zvolíme rovnoměrně náhodně jeden úhel) a průměrný dihedrální úhel cely Θ . Střední hodnoty $E\theta$, $E\Theta$ jsou velmi blízké hodnotě $2\pi/3$, jejich distribuce však mohou být zcela rozdílné. V 2D teselacích je θ' náhodný úhel sevřený hranami (opět v každé cele

volíme rovnoměrně náhodně jeden úhel), pro Θ' pak platí $\Theta' = \pi(1 - 2/n_v)$. Konečně do této skupiny patří izoperimetrické tvarové faktory (Lorz & Hahn, 1993)

$$f = \frac{6v}{\pi w^3}, \quad g = 6\sqrt{\pi} \frac{v}{s^{3/2}}, \quad f' = \frac{4\pi v'}{s'}$$

Tvarové faktory dosahují maximální hodnoty 1 pro kouli a kruh a klesají k nule pro tenké desky i dlouhé tyčinky.

- 3) *ostatní charakteristiky* – sem patří zejména podmíněné střední hodnoty typu $\mathbf{E}(\bullet|n_f=N)$, pravděpodobnosti $\mathbf{P}(n_f=N)$ atd. Velká pozornost byla věnována *charakteristikám sousedství*, jež byly původně empiricky ověřeny pro některé přírodní náhodné rovinné teselace. Podle *Lewisova zákona* (Lewis, 1928, 1943) jsou střední plochy cel s daným počtem hran úměrné tomuto počtu a jeho 3D verze je $\mathbf{E}(v|n_f=N) \propto N$. Byla uvažována i možnost platnosti analogických vztahů pro další rozměrové charakteristiky, např. *Deschův zákon* $\mathbf{E}(s|n_f=N) \propto N$. *Zákon Aboavův-Weaireův* (Aboav, 1970; Weaire, 1974) vyjadřuje poznatek, že čím má cela větší počet stěn, tím nižší počet stěn mají v průměru její sousedé: $m_N \propto 1/N$, kde m_N je střední počet stěn (v 2D hran) polytopů sousedících s polytopem majícím N stěn (hran). Podrobnou analýzu těchto zákonů podal (Chiu, 1994; Chiu, 1995); v ní dokázal zákon Aboavův-Weaireův, zatímco Lewisův zákon nemá žádný teoretický podklad a pouze v některých případech přibližně charakterizuje experimentální data.

2 Bodové procesy

2.1 Definice

Bodový systém $P=\{x_1, \dots, x_n\}$ je konečná množina bodů ležících v omezené oblasti $B \subset \mathbb{R}^d$. Mohou to být například referenční body center nějakých aktivit, o nichž jsme mluvili výše. Rozmístění bodů charakterizujících týž jev v různých oblastech B nebo opakovaný jev v téže oblasti B bývá zhusta podobné. Proto má smysl daný systém P považovat za průnik $\Phi(B)=\Phi \cap B$ oblasti B s náhodnou uzavřenou množinou bodů Φ definovanou na nějaké větší podmnožině \mathbb{R}^d , nejlépe v celém \mathbb{R}^d . Když je Φ lokálně konečná (t.j. konečná v libovolné omezené oblasti) a prostá (žádné dva různé body nekoincidují), nazýváme Φ *bodovým procesem* v \mathbb{R}^d . Bodový proces můžeme charakterizovat například funkcíonálem $V_K(\Phi)=\mathbf{P}(\Phi(K)=\emptyset)$, který se nazývá *pravděpodobnost dutiny* a je definován na třídě všech kompaktních množin $K \subset \mathbb{R}^d$. Je to zřejmě pravděpodobnost, že v dané množině K neleží žádný bod procesu (Stoyan et al., 1995).

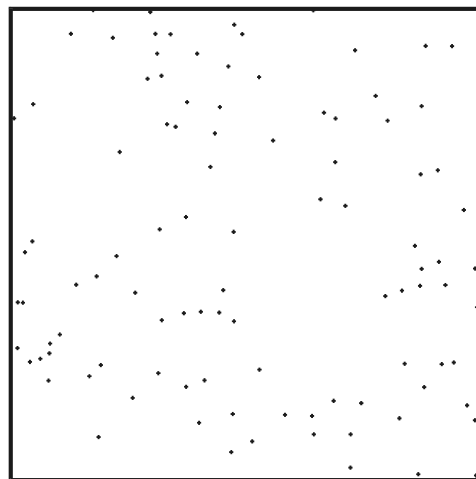
Označme Φ_h bodový proces, který vznikne, když každý bod procesu Φ posuneme o vektor h . Proces se nazývá *stacionární* jestliže $V_K(\Phi) = V_K(\Phi_h)$ pro libovolné h . Stacionární bodový proces má jedinou rozměrovou charakteristiku – *intenzitu procesu* λ , definovanou jako střední hodnota počtu bodů procesu v oblasti jednotkového obsahu.

2.2 Základní typy bodových procesů

Výchozími bodovými procesy pro konstrukci složitějších, především náhodných bodových procesů, jsou *Poissonův bodový proces* (PBP) a *translační bodová mřížka* L^d (s náhodnou polohou počátku, příp. náhodnou orientací).

Stacionární Poissonův bodový proces se obvykle definuje požadavkem nezávislosti distribucí bodů v disjunktních omezených borelovských oblastech B_j nebo předpisem poissonovské distribuce počtu bodů m v borelovské oblasti B (střední hodnota i variance m jsou rovny $\lambda v_d(B)$, kde $v_d(B)$ je obsah oblasti B) anebo konečně pomocí pravděpodobnosti dutiny $V_K(\Phi)=\exp[-\lambda v_d(K)]$. Význam PBP v teorii i v rozpoznávání bodových procesů je zcela klíčový, plně srovnatelný s rolí normálního rozdělení v oblasti číselných náhodných proměnných. Je totiž základním srovnávacím procesem a všechny analýzy jsou více méně založeny na charakterizaci odchylek procesu sledovaného od PBP. Realizuje představu prostorových dějů zcela *rovnoměrně rozložených*, (to znamená, že každé místo uvažovaného prostoru má stejnou pravděpodobnost, že v něm děj proběhne) a zároveň *zcela nezávislých*. Rovnoměrnost se vztahuje

k umístění každého bodu jako jednotlivce, nikoliv k celku – to je právě realizace vzájemné nezávislosti. Lidové úsloví „Granát nepadne dvakrát do jedné díry“ naproti tomu vychází z představy o jisté závislosti a z ní plynoucí pravidelnosti prostorového rozmístění dějů.



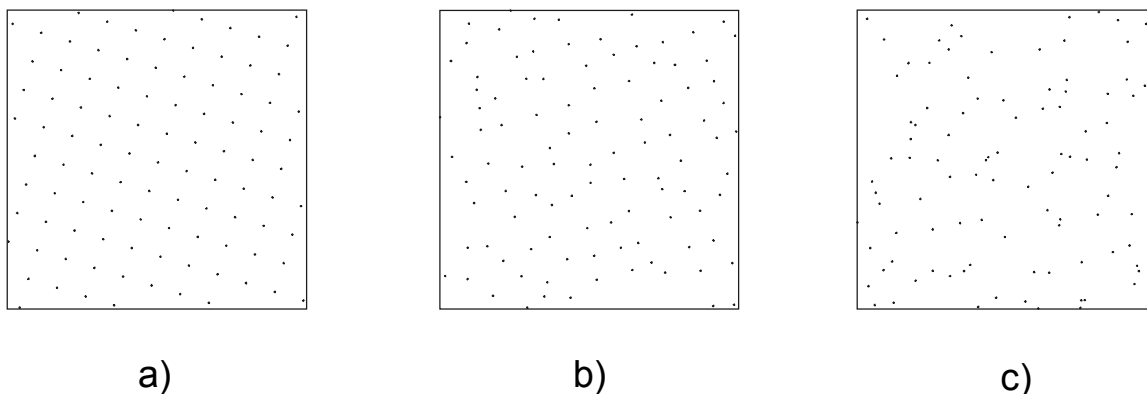
Obr. 3 Průnik $\Phi(W)=\Phi \cap W$ jednotkové oblasti W s PBP intenzity $\lambda = 100$.

Z výrazu pro pravděpodobnost dutiny plyne, že v PBP má libovolně velká dutina nenulovou pravděpodobnost, a tu má, jak je uvedeno níže, i každý bodový shluk.

Z bodových mřížek se nejčastěji používají kubická a čtvercová mřížka, které se svými celkovými vlastnostmi od PBP liší poměrně málo (například distribuce sférických kontaktních vzdáleností jsou dosti podobné, zatímco u obdélníkových mřížek se změnou poměru mřížkových konstant dají v širokých mezích měnit). Má smysl uvažovat také mřížky obsahující z fyziky známé atomové poruchy typu vakancí, multivakancí a intersticiálů. Lze pak dosáhnout značné shody mezi rozložením vzdáleností v PBP a porušené mřížce (Saxl & Rataj, 1991).

Z libovolné bodové mřížky L^d intenzity λ_L můžeme spojitě přejít k PBP dvěma jednoduchými postupy. *Bernoulliův proces* (BP) na mřížce vznikne, když pravděpodobnost realizace libovolného uzlu je $p \leq 1$. Lze dokázat, že limitou BP při $p \rightarrow 0$, $\lambda_L \rightarrow \infty$ při zachování $p\lambda_L = \lambda = \text{konst.}$ je PBP intenzity λ . V *Booksteinově modelu* (BM) (Stoyan & Stoyan, 1992) $B_\sigma^d = \bigcup_{x_k \in L^d} (x_k + \xi_k)$, $x \in L^d$, je L^d modifikována nezávislými identicky rozloženými náhodnými posunutími ξ_k majícími centrované d -rozměrné normální rozdělení s variancí $\sigma^2 I$ (I je jednotková matice). Opět $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} B_\sigma^d$ je PBP intenzity λ_L (Rataj et al., 1993).

Bodová mřížka se vzdáleností nejbližších sousedů ρ_L je příkladem procesu s pevným jádrem – uvnitř koule $hb(x_k, 1)$ poloměru $0 < h < \rho_L$ se středem v bodě procesu x_k neleží žádný jiný bod procesu. Naopak v PBP je pro malé $v_d(B)$ pravděpodobnost existence párového shluku $\mathbf{P}(\Phi(B) \geq 2 \mid \Phi(B) \geq 1) \approx \lambda v_d(B)/2 > 0$, tj. v libovolném ε -okolí bodu procesu není přítomnost dalšího bodu procesu vyloučena. V BM však tuto pravděpodobnost můžeme učinit pro každé kladné ε menší než vzdálenost nejbližších sousedů (v původní mřížce) libovolně malou volbou dostatečně malého σ ; B_σ^d je proces s quasi-pevným jádrem.



Obr. 4 Booksteinův model na čtvercové mřížce: průnik s jednotkovou oblastí W , intenzita $\lambda = 1/a$, kde a je mřížková konstanta.
a) $\sigma = 0$ (neporušená mřížka), b) $\sigma = 0.4a$, c) $\sigma = 1.0a$.

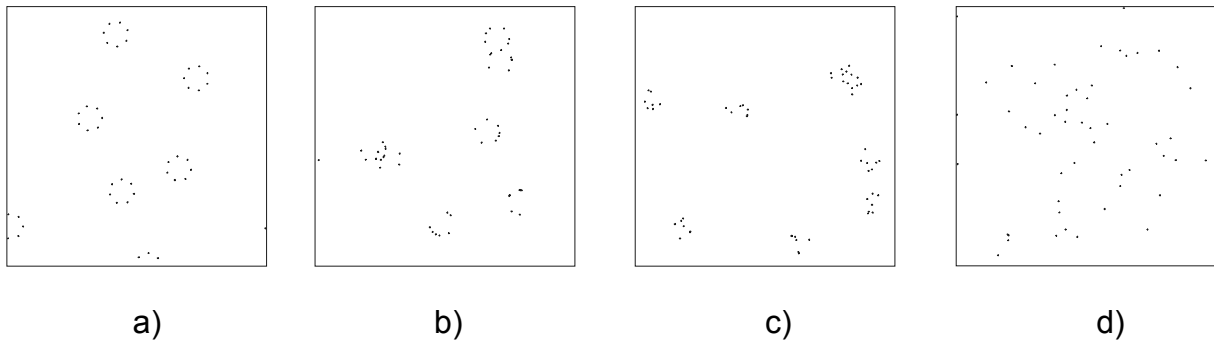
2.3 Shlukové procesy

Shlukové procesy či *shluková bodová pole* můžeme tvořit následujícím postupem (Stoyan et al., 1995). Nechť Z je třída všech konečných posloupností bodů $Z \in \mathbb{R}^d$. Náhodný element $Z \in Z$ s distribucí $\mathbf{P}(Z)$ je náhodný shluk. Jeho numerické charakteristiky jsou $N = \text{card } Z$ (počet bodů, zvaných obvykle dcery), jeho průměr $\text{diam } Z$ či objem konvexního obalu $v_d(\text{conv } Z)$. Nechť dále $\Phi = \{x_1, \dots\}$ je realizace libovolného výše zavedeného bodového

procesu intenzity λ_p a Z_k jsou nezávislé repliky náhodného shluku Z . Pak $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} (x_k + Z_k)$ je

shlukové pole; je náhodnou množinou definovanou jako sjednocení (union set) Poissonova procesu na Z . Body x_k (shluková jádra, zárodky) se obvykle nazývají rodiče. Konkrétně, jestliže Φ je PBP, shlukové pole se nazývá *Booleovské* případně *Neymanovo-Scottovo*. Jestliže $\Phi=L^d$, je X shlukové pole mřížkové. Intenzita shlukových polí je $\lambda=EN\lambda_p$.

Podle typu prostorového rozmístění dcer lze zavést např. shluky *globulární* s dcerami rozmístěnými rovnoměrně náhodně v kouli $Rb(0,1)$, *sférické* s dcerami rozmístěnými rovnoměrně náhodně na $\partial Rb(0,1)$, *pravidelné* s dcerami ve vrcholech pravidelných polytopů pevně či náhodně orientovaných. Podle distribuce N rozlišujeme shluky *binomické* – $N=\text{konst.}$ a *poissonovské* – $\mathbf{P}(N=n) = (\mathbf{E}N)^n/n! \exp(-\mathbf{E}N)$; globulární poissonovské shluky se nazývají *Matérnovy* (terminologie podle Rataj & Saxl, (1997)).



Obr. 5 Binomické shlukové procesy (průnik s jednotkovou oblastí W), $N=7$, $\lambda_p=7$:
a) pravidelné $c=0.5$, b) sférické $c=0.5$, c) globulární $c=0.5$, d) globulární $c=2.0$.

Limitou shlukových polí s náhodnými shluky při $R \rightarrow \infty$ je buď PBP nebo proces PBP alespoň lokálně velmi blízký. Této limitní situace je ovšem dosaženo postupně v několika rozmezech velikosti shluku. Tu je vhodné vyjádřit v bezrozměrných jednotkách ve vztahu ke střední vzdálenosti ρ nejbližších sousedů v procesu rodičů; u shluků na bázi mřížky je rovna nejmenší mřížkové konstantě, u PBP je $\rho = \frac{0.5}{\sqrt{\lambda}}$ ve 2D a $\rho = \frac{0.554}{\sqrt[3]{\lambda}}$ ve 3D (Stoyan et al., 1995; Saxl et al., 1995). Jako charakteristika velikosti shluku se pak zavádí veličina $c=D/\rho$, kde $D=2R$.

Užitečnou veličinou je také lokální intenzita dcer uvnitř shluku $\lambda_{cl}=N/v_d(Rb(0,1))$. Jestliže průměrná hodnota λ_{cl} nepřevyšuje intenzitu shlukového pole $\lambda=EN\lambda_p$, lze shluky považovat za *rozpuštěné*. Pro 3D odtud dostaneme kritický rozměr $c_r^P \approx 2.3$ a $c_r^L \approx 1.2$ pro poissonovské (P) a mřížkové (L) shluky. Jiné dvě charakteristiky velikosti shluku jsou založeny na představě vzájemné interakce shluku. S použitím vztahu pro pravděpodobnost dutiny lze určit pravděpodobnost, že koule průměru D se středem v bodu rodičovského PBP má neprázdný průnik s jinou takovou koulí

$$p_1 = 1 - e^{-\frac{4\pi}{3}\lambda_p D^3} = 1 - e^{-(0.893c)^3}.$$

Podobně pravděpodobnost, že výše zmíněná koule obsahuje střed jiné takové koule je

$$p_2 = 1 - e^{-\frac{\pi}{6}\lambda_p D^3} = 1 - e^{-(0.4465c)^3}.$$

Zřejmě p_1 a p_2 jsou přibližné míry mírné a hluboké interakce shluku (Lorz & Hahn, 1993; Saxl et al., 1996; Saxl & Kohútek 1997). S jejich pomocí můžeme definovat tři oblasti velikosti shluku:

- ◆ Oblast I – *oblast zanedbatelné interakce*: z podmínek $p_1 \leq 0.1$ a $p_2 \leq 0.01$ plyne $0 \leq c \leq 0.5$.
- ◆ Oblast II – *přechodová oblast*: $0.5 \leq c \leq 4$; v této oblasti lze pozorovat silnou závislost charakteristik šlukového pole na rozměru shluku. Hodnota $c_r^p = 2.3$ leží uvnitř této oblasti.
- ◆ Oblast III – *oblast dokonalého promísení shluků*: $p_1, p_2 \approx 1$, $c > 4$; rozlišení šlukového pole od PBP dcer intenzity $\lambda = EN\lambda_p$ je již velmi obtížné.

Analogicky lze odvodit ostře ohraničené oblasti u shluků mřížkových:

- ◆ Oblast I: $p_1 = p_2 = 0$ pro $c < 1$.
- ◆ Oblast II: $1 \leq c < 2$, kritický rozměr $c_r^l = 1.2$ leží opět uvnitř této oblasti.
- ◆ Oblast III: $p_1 = p_2 = 1$, $c \geq 2$; opět mřížkové rozmístění shluků je díky jejich hlubokému promísení jen obtížně sledovatelné.

3 Modely teselací

3.1 Pravidelné teselace

Protože základní myšlenkou při vytváření teselací je v jistém smyslu „ekonomické“ vyplnění prostoru, je zcela přirozené, že velká pozornost byla věnována teselacím více či méně pravidelným. Již jsme uvedli příklady nejjednodušších dokonale pravidelných teselací – čtvercové a kubické. Tyto teselace se však v přírodě i v organizaci řízení na libovolné úrovni vyskytují pouze zřídka nebo vůbec. Je tomu tak proto, že v případě pravoúhlých teselací je malý objem ohraničen příliš velkou plochou. Z tohoto hlediska jsou však kubické a čtvercové teselace ještě stále daleko výhodnější než teselace obdélníkové nebo hranolové. Kromě toho studium v přírodě se vyskytujících struktur, zvláště pak struktur dobře vyžíhaných polykrystalů, ukázalo, že střední hodnoty dihedrálních úhlů jsou obvykle blízké $2\pi/3$ a i střední hodnoty (prostorových) vrcholových úhlů bývají obvykle větší než $\pi/2$.

Optimalizace poměru povrchu a objemu byla známa již ve starověku a je v 2D vyjádřena tzv. izoperimetrickou relací, udávající že ze všech obrazců dané plochy má kruh nejmenší obvod. V 3D existují izoperimetrické relace dvě. První z nich je analogií dvojrozměrného případu: ze všech těles daného objemu má koule nejmenší povrch. Druhá z nich sděluje, že z těchto těles má koule také nejmenší střední šířku. Je proto přirozené, že byla navržena celá řada teselací, se zrnými přibližujícími se kulovému tvaru. Klasický je čtrnáctistěn, vzniklý ořezáním vrcholů pravidelného osmistěnu (omezený šesti čtverci a osmi pravidelnými šestiúhelníky), dále pravidelný rombový dvanáctistěn a protáhlý dvanáctistěn (omezený čtyřmi šestiúhelníky a osmi čtverci). Spolu s krychlí a šestibokým hranolem (se čtvercovými stěnami pláště) tvoří tzv. primární rovnoběžnostěny (Coxeter, 1973). Soubor třírozměrných teselací, vyhovujících výše zmíněným požadavkům, tvořených mnohostěny různých tvarů a vzájemně přizpůsobených rozměrů byl předložen Williamsem (1979). Jedná se o kombinace krychlí, komolých osmistěnu a čtyřstěnu i jiných mnohostěnu s pevnými poměry zastoupení ve struktuře, průměrnými dihedrálními úhly $2\pi/3$, prostorovými vrcholovými úhly většinou převyšujícími $\pi/2$ a s počtem hran stýkajících se v jednom vrcholu mezi čtyřmi a šesti. Význam těchto modelů je však spíše teoretický (Chrapoňski et al., 1994; Chrapoňski & Maliński, 1997; Cwajna et al., 1997). Lokální variabilita podmínek, za nichž vznikají teselace přirozené, je totiž tak vysoká, že pravidelné teselace vzniknout nemohou. Praktické studie naopak ukazují, že například rozměrové distribuce zrn mají velký rozsah (v řádu 1:10 a více pro střední šířku w (Vander Voort, 1982; Schückher, 1968)). Podstatně důležitější je proto výzkum náhodných teselací.

3.2 Náhodné teselace

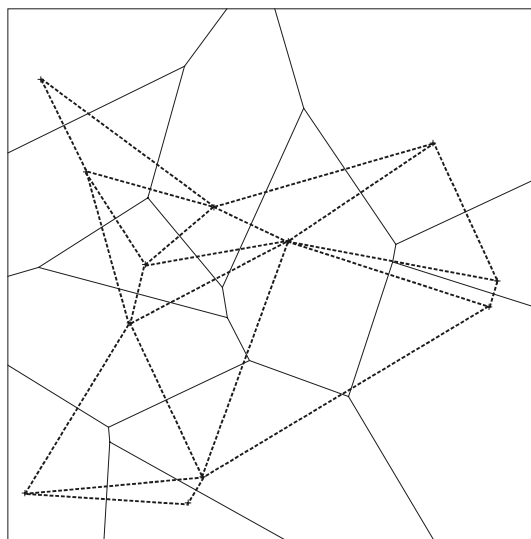
3.2.1 Poissonova teselace

Vedle již popsaných způsobů vzniku náhodných teselací z center – generátorů, může teselace vzniknout také přímou konstrukcí jejich stěn podle zadaného pravidla. Nejznámější je patrně *teselace Poissonova* nebo *teselace Poissonovskými nadrovinami* (Serra, 1982; Stoyan et al., 1995). Stěny této teselace jsou vytvořeny systémem náhodných nadrovin \mathbb{R}^d , to jest přímek v rovině či rovin v prostoru.

Můžeme ji také odvodit z tzv. Boolovského modelu úseček či kruhů (Saxl et al., 1995). Boolovský model opět vychází z Poissonova bodového procesu „zárodků“ (intenzity λ), do nichž jsou následně umístěny „částice“ – nezávisle identicky rozložené uzavřené náhodné množiny. Pro generaci Poissonovy teselace tyto částice volíme jako izotropní úsečky délky l v 2D a izotropní kruhy plochy a v 3D. Poté provedeme limitní přechod $\lambda \rightarrow 0$ a zároveň $l, a \rightarrow \infty$ tak, že λl resp. λa je konstantní. Poissonova teselace není normální a vyznačuje se extrémně vysokou variabilitou rozměrů cel: v jednotkové teselaci je variance obsahu cel $\text{var } v = 12.16$ a $\text{var } v' = 3.84$ (analogické hodnoty pro PVT jsou 0.179 a 0.228).

3.2.2 Delaunayova teselace

Jiným příkladem teselace s přímo generovanými stěnami je *teselace Delaunayova* (Okabe et al., 1992; Stoyan et al., 1995), úzce související s teselací Voronoiovou. Ve standardní (nedegenerované) 2D Voronoiově teselaci leží na kružnici opsané z libovolného vrcholu právě tři generátory cel, které se v něm setkávají. Trojúhelník s vrcholy v těchto generátorech je celou Delaunayovy teselace. Cela je obecně d -rozměrný simplex, tj. trojúhelník v 2D (odtud též *Delaunayova triangulace*), čtyřstěn v 3D. Delaunayova teselace je jednodušší než teselace Voronoiova a lze proto pro ni odvodit podstatně širší soubor vlastností (např. pro Voronoiovu teselaci teoretický tvar rozměrového rozdělení ploch cel v 2D resp. objemů cel v 3D již nejméně dvě desetítky let vzdoruje všem pokusům o odvození (Zuyev, 1992); pro Delaunayovu teselaci je však znám (Rathie, 1992)). Její praktický význam je však omezený na problémy související s teselací Voronoiovou, k níž je *duální* (ve smyslu teorie grafů – Okabe et al., 1992).



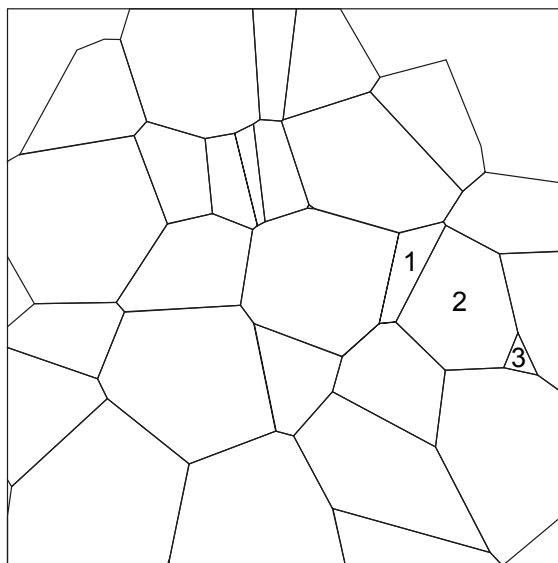
Obr. 6 Voronoiova (tenké čáry) a k ní duální Delaunayova (silné, čárkované čáry) teselace.

3.2.3 Johnsonova-Mehlova teselace

Bylo již uvedeno, že Johnsonova-Mehlova teselace není konvexní. Její cely mají zakřivené stěny, s nezanedbatelnou pravděpodobností se vyskytují cely omezené pouze dvěma stěnami a špičaté výběžky cel zasahující do cel sousedních (Møller, 1992, 1995). Obecně jsou cely hvězdicovitě konvexní vzhledem ke generátoru, to znamená, že generátor je viditelný z každého bodu své cely a naopak. Johnsonova-Mehlova teselace je oblíbeným modelem pro austenitické oceli s velmi širokým rozpětím velikostí zrn a výskytem shluků či vrstev malých zrn v bezprostředním sousedství velkých zrn – totiž v prostorech, která tato nedokáží vyplnit (Schwertel & Stamm, 1997). Z tohoto hlediska má zcela mimořádný význam nehomogenní Johnsonova-Mehlova teselace. Horálek (1990) totiž na základě analýzy ASTM norem pro určování velikosti zrna (ASTM, 1982), provedené Vander Voortem (1982) ukázal, že vzorové diagramy lze interpretovat jako řezy jediné speciální Johnsonovy-Mehlovy nehomogenní teselace s rychlostí nukleace nepřímo úměrnou času.

3.2.4 Indukované teselace

Každá d -rozměrná teselace T^d prostoru \mathbb{R}^d indukuje v libovolné r -rovině F_r^d teselaci T^r dimenze r : $T^r = T^d \cap F_r^d$. s -fasetě původní teselace odpovídá v indukované teselaci $(s+r-d)$ -fasete; například v rovinném řezu 3D teselace se budou cely jevit opět jako cely, stěny jako hrany a hrany jako vrcholy. Jestliže $(s+r-d) < 0$, pak s -fasety původní teselace v indukované teselaci nezanechávají žádné stopy. Typ indukované teselace se jen zřídka shoduje s typem teselace původní. Výjimkou je teselace Poissonovskými nadrovinami, naopak řezu Poissonovou-Voronoiovou teselací nejsou Poissonovo-Voronoiovy teselace (Chiu et al., 1996) - obr.7. Přesto existuje mezi původní a indukovanou teselací celá řada relací, které jsou široce a často zcela nesprávně využívány při hodnocení rovinných řezů polykrystalickými materiály. Připomeňme, že i pravidelné teselace indukují v r -rovinách teselace náhodné.



Obr.7 2D teselace indukovaná Poissonovou-Voronoiovou teselací. Je vidět, že se nejedná o Poissonovu-Voronoiovu teselaci – do buněk 1, 2 a 3 nelze umístit generátory tak, aby hranice buněk byly stejně daleko od obou generátorů.

Náhodnost se však vztahuje k souboru náhodně zvolených r -rovin (poloha, orientace) a nikoliv k jednomu určitému řezu.

3.2.4.1 Rovinná teselace indukovaná prostorovou teselací

Základní stereologické vztahy mezi veličinami 3D teselace a veličinami jí indukované teselace rovinné jsou následující (Underwood, 1970):

$$\lambda' = \frac{1}{E_{V'}} = \lambda E_W, \quad L'_A = \frac{\pi}{4} S_V, \quad \lambda'_v = \frac{1}{2} L_V$$

a dále $L'_A = \lambda E_{S'}/2$, $\lambda'_v = 2\lambda'$, $\lambda'_e = 3\lambda'$, kde λ'_e a λ'_v jsou intenzity (střední hodnoty počtů na jednotkové ploše) vrcholů a středů hran indukované teselace, λ' je intenzita indukované teselace a L'_A je intenzita hran (též míra intenzity hran: střední délka hran na jednotkové ploše) indukované teselace. Počet vrcholů tedy udává na metalografickém řezu strukturou polykrystalu udává míru intenzity styků tří zrn v prostoru.

3.2.4.2 Čárová teselace indukovaná prostorovou teselací

Základní vztahy jsou analogicky (Underwood, 1970)

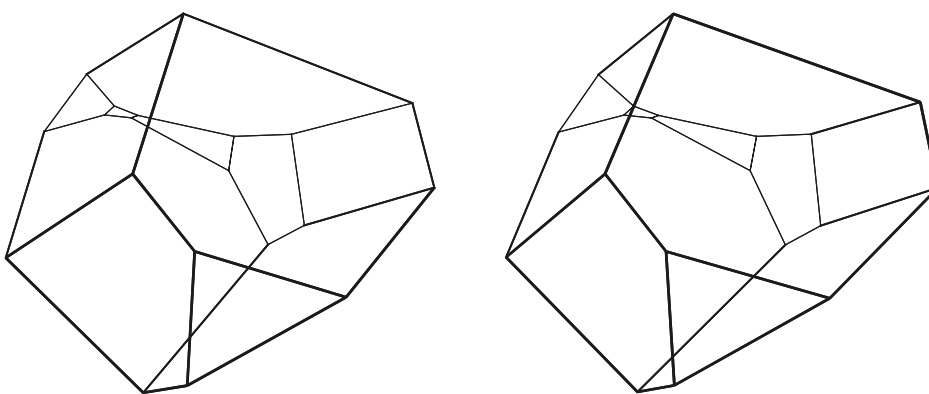
$$\lambda'' = \frac{1}{E_{V''}} = \lambda E_{\sigma}, \quad \lambda''_v = \frac{1}{2} S_V,$$

kde $\lambda'' = \lambda_v''$ jsou zřejmě sobě rovné intenzity teselace a vrcholů a σ je střední hodnota plochy projekce 3D cel na izotropní trs rovin.

3.2.5 Voronoiovy teselace

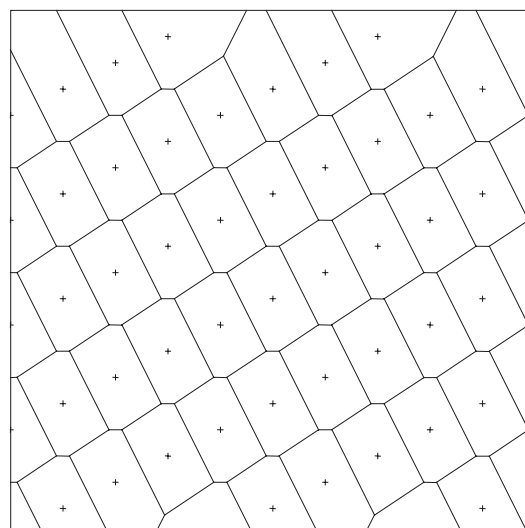
3.2.5.1 Poissonova-Voronoiova teselace

Voronoiova teselace generovaná PBP – *Poissonova-Voronoiova teselace* (PVT) plní při studiu teselací úlohu, kterou má PBP v oblasti bodových procesů. Její vlastnosti jsou standardy pro každou klasifikaci, hypotéza „analyzovaná teselace je PVT“ je nulovou hypotézou každého statistického rozboru. Mnohé její vlastnosti jsou dnes známy, buď na základě teoretických odvození, nebo z rozsáhlých počítačových simulací zahrnujících miliony proměřených cel.



Obr. 8 Stereo-obrázek jedné buňky třírozměrné Poissonovy-Voronoiovy teselace (počet stěn $n_f=12$; počet hran $n_e=30$; počet vrcholů $n_v=20$).

Každému z bodových procesů diskutovaných v kapitole 2. můžeme přiřadit odpovídající Voronoiovu teselaci, která s ním bude ve většině případů jednoznačně svázána, tj. z dané teselace lze zkonstruovat bodový proces, kterým byla generována (výjimkou jsou degenerované teselace). Translační bodové mřížky generují pravidelné teselace, ne vždy však vzniklé cely jsou translačně ekvivalentní s celami mřížkovými. Je tomu tak u základních pravoúhlých mřížek, obecně však nikoli u kosoúhlých: například kosodélníková mřížka generuje



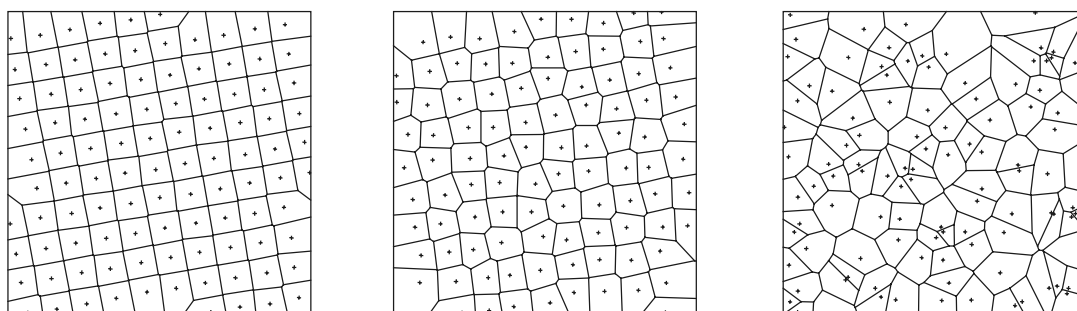
Obr. 9 Rovinná Voronoiova teselace generovaná kosodélníkovou mřížkou.

šestiúhelníkové voronoiovské cely – obr. 9. Výrazně odlišné jsou také cely vytvořené v okolí mřížkových poruch. Systematickým výzkumem teselací generovaných různými bodovými procesy lze vytvořit široké spektrum teselací od

pravidelných, v nichž jsou všechny cely translačně ekvivalentní, až po směsi několika populací cel s výrazně rozdílnými distribucemi a vytvořit tak modely pro teselace reálně se vyskytující.

3.2.5.2 Teselace generovaná Booksteinovým modelem

Teselace generovaná Booksteinovým modelem má především teoretický význam, lze ji však prakticky využít pro charakterizaci materiálů s velmi pravidelným rozložením zpevňujících komponent (Berndt et al., 1996). Pro Booksteinův model lze totiž na rozdíl od přesných modelů s pevným jádrem teoreticky odvodit průběhy celé řady základních veličin, zejména pak rozdělení vzdáleností různého typu (vzdálenosti nejbližších sousedů, sférických kontaktních vzdáleností a charakteristik z nich odvozených), párové korelační funkce aj. (Stoyan, 1990; Saxl, 1996). Booksteinův model a teselace jím generovaná tak vytvářejí spojitý a teoreticky propracovaný přechodový článek mezi pravidelnými mřížkovými teselacemi a PVT. Booksteinovu teselaci s velmi malou hodnotou σ lze použít jako vhodnou aproximaci teselací, které nejsou normální a proto je řadou algoritmů nelze zkonstruovat. Je však třeba mít na paměti, že závislost některých charakteristik cel na směrodatné odchylce kmitů σ má v bodě $\sigma=0$ nespojitost: např. střední počet vrcholů cely náhodné normální teselace v 2D je vždy šest, což pochopitelně platí i pro B_σ^2 , jímž generovaná teselace při $\sigma=0$ přechází v teselaci čtvercovou.



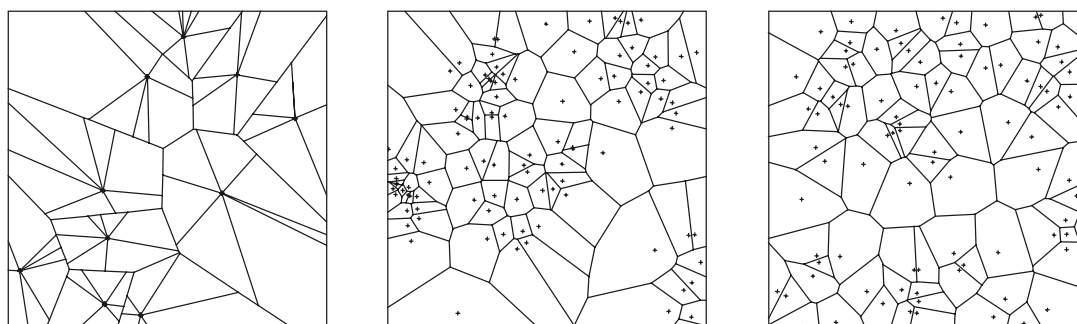
a)

b)

c)

Obr. 10 Booksteinova teselace. a) $\sigma=0.02$, b) $\sigma=0.1$, c) $\sigma=0.5$.

3.2.5.3 Teselace generované shlukovými poli



a)

b)

c)

Obr. 11 Teselace generovaná shlukovým polem (globulární shluky, $N=10$, $\lambda_p=10$):
a) $c=0.1$, b) $c=0.5$, c) $c=2.0$.

Tyto teselace představují velmi širokou třídu dělení prostoru. V první řadě závisí na volbě bodového procesu rodičů, kterým může být mřížka, porušená mřížka, Booksteinův model na ideální či porušené mřížce, PBP a konečně nějaký shlukový proces. Další stupně volnosti představuje prostorové rozmístění bodů shluku, které může do jisté míry imitovat rodičovský proces, jako je tomu u poissonovských globulárních shluků nebo u pravidelných shluků v mřížkách. Sférické shluky kombinují poissonovské rozmístění rodičů v \mathbb{R}^d s poissonovským rozmístěním dcer na sféře dimenze $d-1$ atd. Poslední hladinou modelu je rozměr shluku a typ distribuce počtu dcer. Těmto procesům byla až dosud věnována poměrně malá pozornost, zejména pak nebyla dostatečně doceněna skutečnost, že shluková pole mohou vytvářet různé populace cel, jejichž vlastnosti a zastoupení jsou obecně funkcí všech výše uvedených parametrů shlukového pole a že závislosti teselačních charakteristik na parametrech pole nemusejí být a ani nejsou monotónní (Hermann et al., 1989; Hermann, 1991; Saxl & Kohútek, 1997).

4 Vlastnosti Voronoiových teselací

Teoretické vztahy byly dosud získány pouze pro některé charakteristiky (střední hodnoty a variance) PVT v \mathbb{R}^d a také pro teselace jimi indukované (Gilbert, 1962; Miles, 1972; Brakke, 1985a,b,c; Møller, 1989; Mecke & Muche, 1995; Muche, 1996, 1998). Vzhledem ke složitosti těchto výsledků není pravděpodobné, že ekvivalentní výsledky budou někdy získány pro složitější procesy. Ostatní charakteristiky byly získány počítačovými simulacemi při počtech cel od 10^3 do $2 \cdot 10^8$ (King, 1966; Hinde & Miles, 1980; Quine & Watson, 1984; Brakke, 1985d; Lorz, 1992; Lorz & Hahn, 1993 aj.).

4.1 Globální vlastnosti Poissonovy-Voronoiovy teselace

V odstavci 1.3 byly zmíněny některé globální charakteristiky 3D teselací, jako S_V, L_V charakterizující střední obsahy s -faset v jednotkovém objemu. Obecně můžeme definovat veličinu λ_{d-k} , $d-k=s$, jako intenzitu resp. míru intenzity $(d-k)$ -faset v \mathbb{R}^d , tj. jejich střední obsah v jednotkovém objemu prostoru \mathbb{R}^d . Je potom například $\lambda_{3-2} \equiv L_V$ a $\lambda_{3-1} \equiv S_V$ (když napíšeme např. λ_2 místo λ_{3-1} , vidíme na první pohled, že se jedná o intenzitu dvourozměrných ploch, ale ztratíme informaci v prostoru jaké dimenze se plochy nacházejí; λ_d je samozřejmě vždy rovno jedné). Právě pro intenzity λ_{d-k} byl odvozen následující obecný vztah ($0 \leq k \leq d$) (Miles, 1974; Møller, 1989)

$$\lambda_{d-k} = \frac{2^{k+1} \pi^{k/2} \Gamma\left(\frac{dk+d-k+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)^{k+((d-k)/d)} \Gamma\left(k+\frac{d-k}{d}\right)}{(k+1)! d \Gamma\left(\frac{dk+d-k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)^k \Gamma\left(\frac{d-k+1}{2}\right)} \lambda^{k/d}$$

Ze vzorce je zřejmé, že všechny intenzity jsou homogenními funkcemi jediného parametru - intenzity λ ; PVT je tedy tzv. jednoparametrická teselace a $\lambda^{-1/d}$ má při porovnávání teselací různých intenzit charakter délkové jednotky.

Označíme-li analogicky I_{d-k} číselnou intenzitu $(d-k)$ -faset, tj. střední počet $(d-k)$ -faset v jednotce objemu, pak zřejmě platí

$$\lambda_{d-k} = I_{d-k} \mathbf{E}v_{d-k}(f_{d-k}),$$

kde f_{d-k} je $(d-k)$ -faset a v_{d-k} je její $(d-k)$ -rozměrná míra. V regulárních normálních teselacích jsou intenzity s -faset spolu navzájem svázány (viz např. Møller (1989)) a stačí znát jedinou z nich. Zvolíme-li v prvním vzorci $k=d$, dostaneme z něj číselnou intenzitu vrcholů $\lambda_{d-d} = I_{d-d}$. (Ve speciálních případech 3D, 2D, 1D používáme názornější označení $\lambda_v \equiv I_{3-3}$, $\lambda'_v \equiv I_{2-2}$, $\lambda''_v \equiv I_{1-1}$.) Podobně $I_d \equiv \lambda$, $\lambda_d \equiv 1$ (teselace vyplňuje celý prostor) a tedy $\lambda = 1/\mathbf{E}v_d(v_d)$. Lze tedy vedle globálních charakteristik typu λ_{d-k} , I_{d-k} určit s pomocí vztahu pro λ_{d-k} střední hodnoty rozměrových charakteristik cel, jako například již zavedené veličiny $\mathbf{E}s$, $\mathbf{E}s'$, $\mathbf{E}p$ atd.

4.2 Vlastnosti buněk Poissonovy-Voronoiovy teselace

Z výsledků předcházejícího odstavce plynou pro 3D PVT a jí indukované 2D a 1D teselace následující výsledky (hodnoty označené * odhadli Lorz & Hahn (1993):

veličina •	střední hodnota E •	variance var •
v	λ^{-1}	$0.1790 \lambda^{-2}$
s	$5.8209 \lambda^{-2/3}$	$2.1915 \lambda^{-4/3}$
p	$17.4956 \lambda^{-1/3}$	$13.6179 \lambda^{-2/3}$
w	$1.4580 \lambda^{-1/3}$	* $0.030 \lambda^{-2/3}$
n_f	15.5355	11.1246
θ	* 2.068	* 0.179
f	* 0.579	* 0.006
g	* 0.728	* 0.003
v'	$0.6859 \lambda^{-2/3}$	$0.2270 \lambda^{-4/3}$
s'	$3.1357 \lambda^{-1/3}$	$1.4773 \lambda^{-2/3}$
n_e'	6	2.8627
θ'	* 2.000	* 0.350
f'	* 0.706	* 0.021
v''	$0.687 \lambda^{-1/3}$	$0.160 \lambda^{-2/3}$

Dihedrální úhel θ , tak jak byl definován, poněkud zvýhodňuje úhly cel s menším počtem hran, které jsou menší – proto hodnota $E\theta$ je o něco nižší než $2\pi/3$. Střední hodnota dihedrálního úhlu při jeho rovnoměrném výběru je $2\pi/3$ a variance je nižší: 0.1733 (Muche, 1998).

Rozměrové charakteristiky cel jsou velmi silně korelovány (Lorz & Hahn, 1993). Korelační koeficienty mezi v , p , s a w se pohybují mezi 0.925 a 0.987, pouze koeficient korelace mezi w a p je 0.898. Naproti tomu korelace rozměrových a tvarových veličin jsou podstatně slabší, nejméně závislé jsou pochopitelně hodnoty θ , kde koeficienty korelace se pohybují kolem hodnoty 0.2 se všemi ostatními veličinami. Poměrně vysoká je také korelace mezi objemem a počtem stěn – intuitivně předpokládáme, že velké cely mají hodně stěn (to je v odst. 1.3 zmíněný Lewisův zákon, jehož exaktní a dokazatelnou formulaci se zatím nepodařilo nalézt). Ze simulací jsou známy také distribuce jednotlivých veličin. Téměř symetrické funkce hustoty pravděpodobnosti mají w a n_f . Ostatní rozměrové charakteristiky mají pozitivní šikmost (tj. modus leží vlevo od střední hodnoty), ostatní tvarové charakteristiky mají šikmost negativní. Všechna rozdělení 3D PVT jsou unimodální. Pro objem cel v 2D navrhli Hinde & Miles (1980) zobecněné γ rozdělení typu

$$f(x) = \frac{rb^{q/r}}{\Gamma(q/r)} a^{q-1} \exp(-bx^r)$$

s parametry $q=3.383$, $r=1.053$, $b=3.337$. S vhodně pozměněnými parametry je použitelné i pro 3D.

Distribuce charakteristik indukované teselace mají následující vlastnosti: unimodální jsou pouze n_e a p' a θ' , první dvě s pozitivní šikmostí. Rozdělení s' a f' jsou bimodální, s' má výrazný modus blízko nuly. Vysoká korelace (0.941) je pouze mezi s' a p' .

4.3 Vlastnosti Voronoiových teselací shlukových polí a jiných bodových procesů

Výsledky pro teselace generované 3D shlukovými poli jsou nepočtené a zejména nesystematické. Podrobná měření celého širokého souboru vlastností provedli Lorz & Hahn (1993) a van de Weygaert (1994) pro globulární Poissonovy shluky s $EN=5$, $c=0.991$, 1.478 (Lorz & Hahn) a $c=1.447$ (van de Weygaert) a dále pro $EN=20$ a $c=1.478$ (Lorz & Hahn). Z výsledků odstavce 2.3 vyplývá, že se ve všech případech jedná o měření v oblasti II. Poněkud širší soubor shlukových procesů studoval Lorz (1990) pro $EN=2$ a $c=0.8$, 1.28 , 2.56 ; $EN=5$ a $c=0.8$; $EN=10$ a $c=0.8$, 1.52 , 3.0 ; $EN=20$ $c=0.8$, 1.52 , 3.0 . Bohužel se však omezil pouze na 2D indukované teselace, v nichž sledoval jen plochu cel a její distribuci. Vzhledem ke složité závislosti charakteristik na parametrech EN a c nejsou získané výsledky jednoznačně interpretovatelné. Přesto z nich lze vydedukovat alespoň následující závěry: variance rozměrových veličin rostou s EN a klesají s rostoucím c . Oba tvarové faktory jsou poněkud nižší než u PVT. Střední počet stěn n_f je poněkud nižší, zejména však má distribuce podstatně těžší konce a proto variance n_f je u shlukových procesů vyšší. U dihedrálního úhlu se objevuje bimodalita v blízkosti π a modus rozměrových charakteristik se posouvá směrem k nižším hodnotám, nejsilněji u objemu cel.

Systematičtější studie dvourozměrných shlukových polí uskutečnili Kohútek & Saxl (1993), Saxl & Kohútek (1997) a Saxl et al. (1996). V nich zavedli tři oblasti velikosti shluků popsané v odstavci 2.3 a zjistili základní zákonitosti závislosti momentů rozměrových charakteristik cel na EN a c včetně odchylek od monotónního průběhu.

Dosavadní výsledky v oblasti procesů s pevným jádrem jsou také značně omezené. Lorz (1990) sledoval opět pouze rovinné indukované teselace a zjistil, systematický pokles variancí ploch cel s rostoucím stupněm uspořádání. V podrobnější studii (Lorz & Hahn, 1993) je sledována pouze jediná teselace generovaná procesem s pevným jádrem. Podstatný pokles variancí ve srovnání s PVT byl zaznamenán u všech veličin (i v rovinné indukované teselaci) a zároveň byl zjištěn výrazný vzrůst tvarových faktorů a nepatrný vzrůst střední hodnoty $E\theta$ na hodnotu 2.080. U všech distribucí také došlo ke zúžení rozsahu pozorovaných hodnot a velmi výraznému zvýšení hodnot funkcí hustoty pravděpodobnosti v modech. Výrazně bimodální rozdělení mají jediné plochy cel indukované teselace (opět s druhým modem v blízkosti počátku). Podobné výsledky byly získány i v práci (Ponížil & Saxl, 1996) na souboru teselací generovaných Booksteinovým modelem na kubické mříži B_σ^3 se $\sigma=0.005, \dots, 10.0$; závislosti některých veličin, zejména Ew , na σ opět nebyly monotónní.

4.4 Praktické využití Voronoiových teselací

Aplikace Voronoiových teselací můžeme nalézt v mnoha oborech. Fischer & Koch (1973) je použili při popisu soutěžení mezi plodinami a plevelem v zemědělství. S teselacemi se často můžeme setkat v kosmologii při studiu prostorového rozložení galaxií (Matsuda & Shima, 1984; Van de Weygaert, 1994) a v astrofyzice při sledování distribuce hmotností při kondenzaci oblaků mezihvězdného plynu (King, 1966). V buněčné biologii počítačově modeloval Honda (1983) pomocí teselací geometrické charakteristiky buněk v tkáních a dosáhl dobrého souladu při popisu buněk v pokožce savců (Honda et al., 1979). V metalografii srovnával 2D a 3D charakteristiky zrn kovů a cel Voronoiových teselací Boots (1987). Stoyan & Stoyan

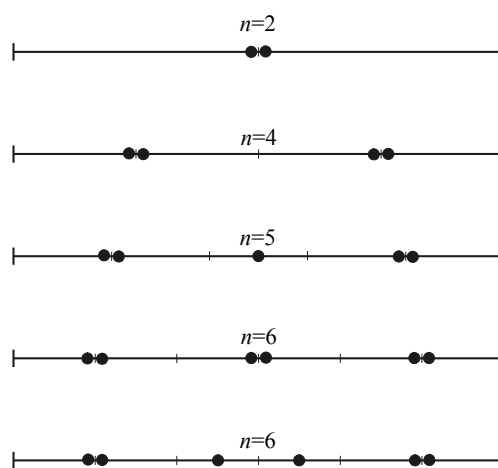
(1980) použili Voronoiovy teselace v geologii při vysvětlení vzniku sloupcových struktur v čediči a Gilbert (1962) pro popis rozmístění zrn krystalů v prostoru. Ve fyzice je možné setkat se s Voronoiovými teselacemi při výzkumu struktury kapalin (Ogawa & Tanemura, 1974; Finney, 1970). Huang et al. (1998) použil Voronoiovy teselace pro popis experimentálně získaných tvarů sférolitů v polypropyleny a počítačovou simulaci jejich růstu.

Dosud podané příklady vesměs buď analyzují bodové systémy a Voronoiovy teselace jsou jen jejich názornější reprezentací, nebo hodnotí rozdíly mezi nějakou reálnou teselací a Voronoiovou teselací vytvořenou vhodně vybranými generátory (např. těžišti reálných cel). V ekonomických, sociálních a ekologických aplikacích se však vyskytují i aplikace zcela jiné povahy. Zahrnují totiž interakci mezi teselací a bodovým systémem, tedy jakousi zpětnou vazbu. Teselace generovaná výchozím bodovým systémem je pouze nultou variantou, jejíž charakteristiky se postupně zlepšují či regulují následným posuvem generátorů. Modely tohoto typu se nazývají *prostorově časové*. Také v Johnsonově-Mehlově teselaci je jednoduchá zpětná vazba skryta v podmínce, že zárodek generovaný uvnitř již rostoucí cely zaniká; žádná z charakteristik teselace se však na tomto rozhodnutí nepodílí.

První model prostorově časového typu se vyskytuje v práci Hotellinga (1929) „Stabilita v soutěžení“ (rozumí se ekonomickém). V ní i v řadě následných aplikací je řešen problém přemístování bodů – provozoven n firem na dané konečné oblasti. Zřejmě se každá firma snaží najít co největší zónu vlivu, tedy Voronoiovu celou $V(x_i)$. Globální rovnováhy je dosaženo, když žádná firma již dalším posunutím provozovny nemůže svou oblast zvětšit. Řešení pro 1D (např. provozovny kolem silnice) podali Eaton & Lipsey (1975) a ukázali, že častá optimální konfigurace jsou provozovny těsně u sebe – obr. 12. Bez znalosti tohoto výsledku se možná divíme, proč benzínové pumpy různých firem jsou tak často velmi blízko sebe. Podstatně obtížnější případ exaktně vyřešen není – viz např. Okabe & Aoyagi (1991); nicméně bylo alespoň prokázáno, že možnost dosažení rovnovážného stavu závisí kriticky na počtu generátorů (firem) i na tvaru obsluhované oblasti.

Regulovatelné modely (adjustment models) – Hasegawa & Tanemura (1980) jsou složitějším typem prostorově časových modelů a uplatňují se i při modelování uspořádání jedinců živočišných druhů na základě jistých jejich základních vlastností. Snaha o získání maximálního prostoru může být doplněna úsilím o získání výhodnějšího, např. bezpečnějšího, místa v blízkosti středu (těžiště) oblasti. 1D případ (např. rozdělení napájecích míst u řeky) je řešitelný i analyticky, 2D situace pouze simulacemi; zdá se však, že rovnováha je dosažitelná.

Dvoudruhové modely (two-species models) řeší podstatně komplikovanější situace, jako je prostorové rozmístění dravce a kořisti či kulturních rostlin a plevelů



Obr.12 Globální rovnovážná konfigurace n firem na omezeném jednorozměrném trhu (pro $n=3$ rovnovážné řešení neexistuje, pro $n \geq 6$ je jich nekonečně mnoho, dvě extrémní jsou ukázána (Eaton & Lipsey, 1975)).

(Hamilton, 1971; Fischer & Miles, 1973; Cruz-Orive, 1979). U živočichů je výsledkem vytváření shluků kořistí (stáda dobytka, hejna ryb – při tom hybnou silou nemusí být společná obrana, ale zvýšení možnosti výběru dravce a tedy snížení nebezpečí „sobeckého“ jedince), u rostlin vznikne quasi-regulární teselace odpovídající pravidelnému výsevu plodiny, do níž poissonovský rozsev plevelů zanášá poruchy „intersticiálního“ typu.

Uvedené příklady jsou založeny pouze na velikosti cel resp. elementárním chování jedinců. Teselace mají však široké využití i při optimalizaci rozmístění nejruznějších center obsluhy (poštovní schránky, úřadovny, knihovny, školy) či při optimalizaci tras (dopravní prostředky, pojízdné prodejny) s ohledem na vytíženost i snadnou dostupnost pro spotřebitele. Obsáhlý přehled literatury je v knize Okabe et al. (1992).

5 Konstrukce Voronoiových teselací a výběrů z nich

V této kapitole budou popsány metody konstrukce Voronoiových teselací a jejich průniků se zvolenými konečnými oblastmi v případech, kdy předpokládáme, že bodový proces generátorů je definován v celém prostoru \mathbb{R}^d . Soustředíme se hlavně na konstrukci Voronoiových teselací v rovině a v závěru postup rozšíříme na vícerozměrný případ.

Při dalších úvahách budeme předpokládat splnění následujících předpokladů:

- ♦ Numerické výpočty jsou přesné (neuvažujeme omezení daná konečnou délkou reprezentace reálných čísel v počítači)
- ♦ Žádné čtyři generující body neleží na společné kružnici

Nejjednodušší (přirozená) metoda konstrukce Voronoiovy teselace vychází přímo z její definice (Rhynsburger, 1973).

1) Mějme n generátorů $P=(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

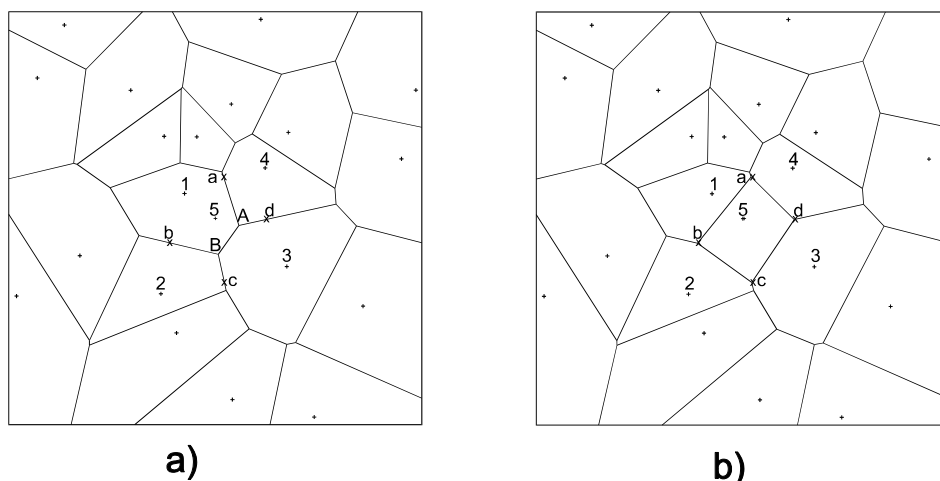
2) Pro každé i takové, že $i=1, 2, \dots, n$, vytvoříme $n-1$ polorovin $H(x_i, x_j)$, $1 \leq j \leq n, j \neq i$.

3) Průnikem polorovin $H(x_i, x_j)$, $1 \leq j \leq n, j \neq i$ je buňka teselace $V(x_i)$.

Přirozená metoda je intuitivní, ale není vhodná pro algoritmizaci. Počet polorovin a tedy i čas výpočtu roste s n^2 a navíc výpočet průniku velkého počtu polorovin není triviální záležitost. Proto se tato metoda v praxi nepoužívá a přednost se dává metodám rychlejším a algoritmicky jednodušším.

5.1 Inkrementální algoritmus

Tento algoritmus patří mezi nejpoužívanější pro svou jednoduchost a časovou nenáročnost výpočtu (Ohya et al., 1984). Budeme se jím zabývat nejdůkladněji, protože je použit v našich programech pro konstrukci teselací.



Obr.13 Inkrementální algoritmus

a) do teselace byl přidán nový generátor (č.5),

b) teselace po přiřazení cely generátoru č.5.

Metoda začíná s velmi jednoduchou Voronoiovou teselací vytvořenou několika málo generátory (většinou třemi ve 2D a čtyřmi ve 3D případě). Tato teselace se pak postupně modifikuje přidáváním dalších generátorů. Hlavní část algoritmu tedy spočívá v transformaci teselace z $l-1$ na l generátorů pro každé $l=4, 5, \dots, n$. Postup je ilustrován na obr. 13. Na obrázku 13a) je zachycena teselace, do

níž byl přidán další generátor (bod 5). Je třeba nalézt všechny vrcholy, ke kterým má tento nový generátor menší vzdálenost, než jejich generátory. Na obrázku 13a) jsou to vrcholy A a B. Vrchol A je definován generátory 1, 3 a 4; vrchol B pak generátory 1, 2 a 3. Tyto nalezené vrcholy budou novým generátorem odstraněny. Existovat přestane i hrana spojující odstraněné vrcholy. Na hranách spojujících odstraněné vrcholy se sousedy, kteří jsou v mozaice ponecháni naopak vzniknou nové vrcholy. Na obrázku 13a) bude odstraněna hrana mezi buňkami 1 a 3. Na hraně mezi buňkami 1 a 4 vznikne nový vrchol (označený písmenem a), který bude mít stejnou vzdálenost ke generátorům 1, 4 a 5. Podobně vzniknou i nové vrcholy b, c, d. Nová teselace s l buňkami je na obrázku 13b).

5.2 Dělicí algoritmus

Tento algoritmus (v angličtině zvaný „divide-and-conquer“) vychází z myšlenky, která je základem mnoha efektivních algoritmů. Princip spočívá v rekurzivním dělení problému na menší snadněji řešitelné části. V tomto případě se využívá toho, že sestavit teselaci pro trojici generátorů je triviální problém (teselaci tvoří osy stran trojúhelníka, jehož vrcholy leží v generátorech). Postup řešení je následující (Shamos & Hoey, 1975; Guibas & Stolfi, 1985):

- 1) Generátory $P=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ uspořádáme podle rostoucí souřadnice x .
- 2) Je-li $n \leq 3$ sestrojme teselaci z dvou nebo tří generátorů a pokračujme bodem 4); je-li $n > 3$ pokračujme bodem 3).
- 3) Nechť t celá část $n/2$. Rozdělme P na $P_L=(x_1, \dots, x_t)$ a $P_R=(x_{t+1}, \dots, x_n)$. Obě teselace řešme odděleně od bodu 2).
- 4) Spojme teselace generované P_L a P_R . Při spojování dílčích teselací využíváme skutečnosti, že nově vzniklé vrcholy (na hranici mezi teselacemi) leží na hranách jdoucích z nějakého uzlu do nekonečna.

5.3 „Plane sweep“ algoritmus

Metoda pohyblivé přímky (line sweep method) je obecná metoda používaná při řešení rovinných problémů. Metoda spočívá v použití (podle konvence vertikální) přímky, kterou posouváme horizontálně po rovině. Pohybující se přímka postupně zasahuje jeden po druhém objekty ležící v rovině. Vždy když dojde k takovéto události, je vyřešen dílčí problém na přímce (Preparata & Shamos, 1985).

Jednoduché aplikaci metody při konstrukci teselací brání skutečnost, že pohyblivá přímka musí při konstrukci vrcholů a hran vzít v úvahu i generátory, které leží před ní. Tento problém se řeší transformací souřadnic generátorů, která však vede k tomu, že hrany teselace jsou částmi hyperbol. Protože je tato metoda implementačně náročná, používá se jen zřídka.

5.4 Algoritmy pro vícerozměrné teselace

Konstrukce Voronoiových teselací ve tří a vícerozměrném prostoru je výrazně složitější jak algoritmicky, tak i s ohledem na časovou náročnost. Bylo dokázáno (Klee, 1980), že časová náročnost na rozdíl od rovinného případu nemůže být lineárně závislá na počtu generátorů n , ale bývá horší než n^2 .

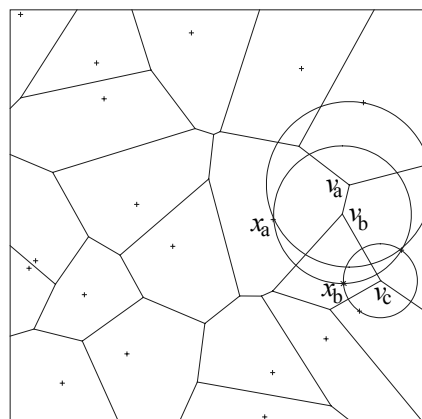
Pro konstrukci třírozměrných teselací se zpravidla používá inkrementální algoritmus (Bowyer, 1981).

Je-li dimenze prostoru $d > 3$, lze použít algoritmus založený na transformaci z d -rozměrného prostoru se souřadnicemi generátoru $p_i=(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{id})$ do

$(d+1)$ -rozměrného prostoru se souřadnicemi generátoru definovanými $p_i^* = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{id}, x_{i1}^2 + x_{i2}^2 + \dots + x_{id}^2)$. Generátory pak leží na parabolické nadploše, pro kterou existují velmi efektivní algoritmy pro nalezení $(d+1)$ -tic bodů definujících vrcholy teselace (Brown, 1979).

5.5 Konstrukce výběrů z neomezených teselací, korekce na okrajové jevy

PBP je ergodický, proto charakteristiky cel budou stejné pro cely z jedné velké Poissonovy-Voroniovy teselace i pro „typické“ cely vybrané z různých realizací teselace. Existují tedy dvě možnosti – vygenerovat velké množství generátorů v oblasti B , zkonstruovat Voroniovu teselaci a změřit charakteristiky všech jejích cel. S tímto přístupem jsou však spojeny dvě komplikace. Bez ohledu na to, kolik cel bude tvořit teselaci, musíme odstranit okrajové cely (cely, jejichž tvar je ovlivněn blízkostí okraje). Poloha každého vrcholu mozaiky je určena polohou jeho tří (ve 2D) generátorů (v obrázku 14 leží tyto generátory na kružnicích opsaných vrcholům v_a , v_b a v_c). Aby mohl být vrchol ovlivněn dalším generátorem (ležícím mimo oblast B), musel by tento být bližší než generátory. Z obrázku 14 je patrné, že vrchol v_a je okrajový - mohl by být ovlivněn generátorem, který by ležel ve vystínované kruhové úseči. Vrcholy v_b a v_c nemohou být ovlivněny žádným generátorem ležícím mimo oblast B . Každá cela, která má aspoň jeden vrchol okrajový je okrajová a nesmí být započítána. Na první pohled je



Obr. 14 Určení okrajových cel.

výsledek paradoxní protože cely vytvořené generátorem x_a je okrajová i když je dál od okraje než cely x_b , která je vnitřní. Tento způsob nemusí být nestranný protože by mohl přednostně vyřazovat větší nebo protáhlé cely. Výběr cel pro další zpracování se proto provádí tak, že se vyberou všechny okrajové generátory (generátory, jejichž cely má aspoň jeden vrchol okrajový) a stanovíme vzdálenost těchto generátorů od hranice oblasti B . Šířka ochranného okraje je maximum z těchto vzdáleností. Jako okrajem neovlivněné pak bereme cely, jejichž generátory neleží v ochranném okraji.

Druhou komplikací při použití velkých teselací je skutečnost, že charakteristiky sousedních buněk nejsou nezávislé (např. Aboavův-Weaireův zákon, Lewisův zákon – odst. 1.3). Proto musí být počet buněk dostatečně velký.

Druhou možností je konstrukce jednotlivých typických cel. Při tomto způsobu se nejčastěji volí generátor typické cely v počátku a ostatní generátory jsou rozmístěny náhodně kolem počátku. Tato metoda není zatížena problémy s okrajem, na druhé straně je pro konstrukci jedné cely třeba uvažovat polohu několika desítek sousedních generátorů a proto je konstrukce pomalá.

6 Použitá literatura

- Aboav, D.A. (1970) The arrangement of grains in a polycrystal. *Metallography*, **3**, 383-390.
- ASTM E 112-82 (1982) *Standard Methods for Determining Average Grain Size*.
- Berndt S., J. Bretschneider, H. Helm and D. Stoyan (1996) Characterization of the degree of regularity of two-dimensional random quasi-lattice structures. *Materials Characterization*, **36**, 93-101.
- Besterci, M., I. Kohútek, K. Sülleiová and I. Saxl (1995) Analýza prostorového rozmístění částic v tenké fólii kompozitu na bázi Al. *Kovové materiály*, **33**, 251-268.
- Boots, B.N. (1987) Edge length properties of random Voronoi polygons. *Metallography*, **20**, 231-236.
- Bowyer, A. (1981) Computing Dirichlet tessellations. *The Computer Journal*, **24**, 162-166.
- Brakke, K.A. (1985a) *Statistics of Random Plane Voronoi Tessellations*. Techn. Report, Department of Math. Sciences, Susquehanna University, Selinsgrove (nepublikováno).
- Brakke, K.A. (1985b) *Random Voronoi Tessellations in Arbitrary Dimension*. Techn. Report, Department of Math. Sciences, Susquehanna University, Selinsgrove (nepublikováno).
- Brakke, K.A. (1985c) *Statistics of Three Dimensional Random Voronoi Tessellations*. Techn. Report, Department of Math. Sciences, Susquehanna University, Selinsgrove (nepublikováno).
- Brakke, K.A. (1985d) *200 000 000 Random Voronoi Polygons*. Techn. Report, Department of Math. Sciences, Susquehanna University, Selinsgrove (nepublikováno).
- Brown, G.S. (1965) Point density in stems per acre. *New Zealand Forestry Service Research Notes*, **38**, 1-11.
- Brown, K.Q. (1979) Voronoi diagrams from convex hulls. *Information Processing Letters*, **9**, 223-228.
- Coxeter, H.M.C. (1973) *Regular Polytopes*. Dover Publications, New York.
- Cruz-Orive, L-M. (1979) Distortion of certain Voronoi tessellations when one particle moves. *J. Appl. Prob.*, **16**, 95-103.
- Cwajna, J., J. Chrapoński and M. Maliński (1997) Application of 3D models on materials microstructure in stereology. In: Wojnar, L., Roźniatowski, K., Kurzydłowski, K.J. (eds.): *Proc. Int. Conf. on The Quantitative Description of Materials Microstructure*. Warsaw, 27-36.

- Dirichlet, G.L. (1850) Über die Reduction der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, **40**, 209-227.
- Eaton, B.C., and R.G. Lipsey (1975) The non-uniqueness of equilibrium in the Löschan location model. *The American Economic Review*, **66**, 77-93.
- Finney, J.L. (1970) Random packing and the structure of simple liquids. II. The molecular geometry of simple liquids. *Proceedings of the Royal Society of London A*, **319**, 495-507.
- Fischer, R.A. and R.E. Miles (1973) The role of spatial pattern in the competition between crop plants and weeds. A theoretical analysis. *Mathematical Biosciences*, **18**, 335-350.
- Gilbert, E.N. (1962) Random subdivisions of space into crystals. *Annals of Mathematical Statistics*, **33**, 958-972.
- Gruber, P.M. and J.M. Wills (1993) *Handbook of Convex Geometry*. North-Holland, Amsterdam, London, New York, Tokyo.
- Guibas, L. and J. Stolfi (1985) Primitives for the manipulation of general subdivisions and the computation of Voronoi diagrams. *ACM Transaction on Graphics*, **4**, 74-123.
- Hamilton, W.D. (1971) Geometry of the selfish herd. *Journal for the Theoretical Biology*, **31**, 295-311.
- Hasegawa, M. and M. Tanemura (1980) Spatial patterns of territories. In: Matusita K. (ed.): *Recent Developments in Statistical Inference*. North-Holland, Amsterdam, 73-78.
- Hermann, H. (1991) *Stochastic Models of Heterogeneous Materials*. Mat. Sci. Forum 78. Trans. Tech. Publ., Zürich.
- Hermann, H., H. Wendrock and D. Stoyan (1989) Cell-area distribution of planar Voronoi mosaics. *Metallography*, **23**, 189-200.
- Hinde, A.L. and R.E. Miles (1980) Monte Carlo estimates of the distribution of the random polygons of the Voronoi tessellation with respect to a Poisson process. *J. Statist. Comput. Simul.*, **10**, 205-223.
- Honda, H. (1983) Geometrical models for cells in tissues. *International Review of Cytology*, **81**, 191-248.
- Honda, H., T. Morita and A. Tanabe (1979) Establishment of epidermal cell columns in mammalian skin: computer simulation. *Journal of Theoretical Biology*, **81**, 745-759.
- Hoofd, L., Z. Turek, K. Kubat, B.E.M. Ringnalda and S. Kazda (1985) Variability of intercapillary distance estimated on histological sections of rat heart. *Advances in Experimental Medicine and Biology*, **191**, 239-247.
- Horálek, V. (1990) ASTM grain-size model and related random tessellation models. *Materials Characterization*, **25**, 263-284.

- Hotelling, H. (1929) Stability in competition. *Economic Journal*, **39**, 41-57.
- Huang, T., T. Tsuji, A.D. Rey and M.R. Kamal (1998) The development of spherulitic domain in polymer films. *Polymeric Materials Science and Engineering*, **79**, 132-133.
- Chiu, S.N. (1994) Mean-value formulae for the neighbourhood of the typical cell of a random tessellation. *Adv. Appl. Prob.*, **26**, 565-576.
- Chiu, S.N. (1995) Aboav-Weaire's and Lewis' laws. A Review. *Materials Characterization*, **34**, 149-165.
- Chiu, S.N., R. Van de Weygaert and D. Stoyan (1996) The sectional Poisson-Voronoi tessellation is not a Voronoi tessellation. *Adv. Appl. Prob.*, **28**, 356-376.
- Chrapoński, J. and M. Maliński (1997) Estimation of grain size I, II, III. In: Wojnar, L., Roźniatowski, K., Kurzydłowski, K.J. (eds.): *Proc. Int. Conf. on The Quantitative Description of Materials Microstructure*. Warsaw, 215-222, 223-228, 229-234.
- Chrapoński, J., M. Maliński and J. Cwajna (1994) Stereological parameters of model polycrystalline structures built from polyhedra of various shape and size. *Acta Stereol.*, **13**, 299-304.
- King, T. (1966) Random fragmentation in two and three dimensions. *Zs. f. Astrophysik*, **64**, 433-439.
- Klee, V. (1980) On the complexity of d -dimensional Voronoi diagrams. *Arch. Math.*, **34**, 75-80.
- Kohútek, I. and I. Saxl (1993) Properties of the Voronoi tessellation corresponding to the generalized planar Gauss-Poisson process. *Acta Stereol.*, **12**, 155-162.
- Lewis, F.T. (1928) The correlation between cell division and the shapes and sizes of prismatic cells in the epidermis of *Cucumis*. *Anatomical Record*, **38**, 341-376.
- Lewis, F.T. (1943) The geometry of growth and cell division in epithelial mosaics. *American Journal of Botany*, **30**, 766-776.
- Lorz, U. (1990) Cell-area distributions of planar sections of spatial Voronoi mosaics. *Materials Characterization*, **25**, 297-309.
- Lorz, U. (1992) Distribution of cell characteristics of the spatial Poisson-Voronoi tessellation and plane sections. In: Eckhardt, U., Hübler, A., Nagel, W., Werner G. (eds.): *Geometrical Problems of Image Processing*. Research in Informatics, Vol. 4. Akademie-Verlag, Berlin, 171-178.
- Lorz, U. and U. Hahn (1993) *Geometric Characteristics of Random Spatial Voronoi Tessellations and Planar Sections*. Preprint 93-05. TU Bergakademie Freiberg, Freiberg.
- Matsuda, T. and E. Shima (1984) Topology of supercluster-void structure. *Progress of Theoretical Physics*, **71**, 855-857.

- Mecke, J. and L. Muche (1995) The Poisson-Voronoi tessellation I – A basic identity. *Math. Nachr.*, **176**, 199-208.
- Mecke, J., R.G. Schneider, D. Stoyan and W.R.R. Weil (1990) *Stochastische Geometrie*. Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin.
- Miles, R.E. (1972) The random division of space. *Adv. Appl. Prob.*, **4**(Supplement), 243-266.
- Miles, R.E. (1974) A synopsis of 'Poisson flats in Euclidean spaces'. In: Harding E.F. and Kendall D.G. (eds.): *Stochastic Geometry*. J. Wiley & Sons, New York, 202-227.
- Møller, J. (1989) Random tessellations in \mathbb{R}^d . *Adv. Appl. Prob.*, **21**, 37-73.
- Møller, J. (1992) Random Johnson-Mehl tessellations. *Adv. Appl. Prob.*, **24**, 814-844.
- Møller, J. (1994) *Lectures on Random Voronoi Tessellations*. Lecture Notes in Statistics 87. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg.
- Møller, J. (1995) Generation of Johnson-Mehl crystals and comparative analysis of models for random nucleation. *Adv. Appl. Prob.*, **27**, 367-383.
- Muche, L. (1993) An incomplete Voronoi tessellation. *Appl. Mathematicae*, **22**, 45-53.
- Muche, L. (1996) The Poisson-Voronoi tessellation II - Edge length distribution function. *Math. Nachr.*, **178**, 271-283.
- Muche, L. (1998) The Poisson-Voronoi tessellation III - Miles' formula. *Math. Nachr.* (in press).
- Niggli, R. (1927) Die topologische Strukturanalyse. *Zs. f. Kristallographie*, **65**, 391-415.
- Ogawa, T. and M. Tanemura (1974) Geometrical considerations on hard core problems. *Progress of Theoretical Physics*, **51**, 399-417.
- Ohya, T., M. Iri and K. Murota (1984) Improvements of the incremental method for the Voronoi diagram with computational comparisons of various algorithms. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **27**, 306-336.
- Okabe, A. and M. Aoyagi (1991) Existence of equilibrium configurations of competitive firms on an infinite two-dimensional space. *Journal of Urban Economics*, **29**, 349-370.
- Okabe, A., B. Boots and K. Sugihara (1992) *Spatial Tessellations*. J. Wiley & Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore.
- Pelikán, K., P. Ponížil and I. Saxl (1995a) Stochastic models of short fibre composites. *The Polymer Processing Society, European meeting 1995, Book of abstracts*. Inst. für Kunststofftechnologie, University of Stuttgart, Stuttgart, paper No. 5.31.
- Pelikán, K., I. Saxl and P. Ponížil (1995b) Germ-grain model of short fibre composites. *Acta Stereol.*, **14**, 75-82.

- Ponížil, P. and I. Saxl (1996) Booksteinův model na kubické mřížce a Voronoiova teselace jím generovaná. In: *Proc. Conf. Progress in Physical metallurgy 1996*. VUT Brno, Brno, 47-50.
- Preparata, F.P. and M.I. Shamos (1985) *Computational Geometry – An Introduction*. Springer-Verlag, New York.
- Quine, M.P. and D.F. Watson (1984) Radial generation of n -dimensional Poisson processes. *J. Appl. Prob.*, **21**, 548-557.
- Rataj, J. and I. Saxl (1997) Boolean cluster models: mean cluster dilations and spherical contact distances. *Math. Bohem.*, **122**, 21-36.
- Rataj, J., I. Saxl and K. Pelikán (1993) Convergence of randomly oscillating point patterns to the Poisson point process. *Appl. Math.*, **38**, 221-235.
- Rathie, P.N. (1992) On the volume distribution of the typical Poisson-Delaunay cell. *J. Appl. Prob.*, **29**, 740-744.
- Rhynsburger, D. (1973) Analytic delineation of Thiessen polygons. *Geographical Analysis*, **5**, 133-144.
- Saxl, I. (1996) Charakteristiky Booksteinova modelu na kubické mřížce softwarem Mathematica. *Sborník semináře "Programy a algoritmy numerické matematiky. Janov n.N., 10.6.-14.6.1996*. Matematický ústav AVČR, Praha, 177-183.
- Saxl, I. and I. Kohútek (1997) Voronoi tessellations generated by Boolean cluster fields. In: Wojnar L, Roźniatowski, K., Kurzydłowski K.J. (eds.): *Proc. Int. Conf. on The Quantitative Description of Materials Microstructure*. Warsaw, 481-488.
- Saxl, I., I. Kohútek and M. Besterici (1996) Particle cluster analysis in heterogeneous systems. In: Parilák, L., Danninger, H., Dusza, J., Weiss, B. (eds.): *Deformation and Fracture in Structural PM Materials*. Inst. Mater. Res. SAV, Košice, 221-230.
- Saxl, I., K. Pelikán, J. Rataj and M. Besterici (1995) *Quantification and Modelling of Heterogeneous Systems*. Cambridge Int. Science Publishing, Cambridge.
- Saxl, I. and J. Rataj (1991) Sférická kontaktní vzdálenost - charakteristika prostorového uspořádání částic. *Pokroky práškové metalurgie (VÚPM Šumperk)*, No. 1-2, 88-160.
- Serra, J.P. (1982) *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, London.
- Shamos, M. I. and D. Hoey (1975) Closest-point problems. *Proc. of the 16th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*. 151-162.
- Schückher, F. (1968) In: DeHoff, R.T., Rhines, F.N. (eds.): *Quantitative Microscopy*. McGraw-Hill Book Comp., New York, 201-265.
- Schwertel, J., and H. Stamm (1997) Analysis and modelling of tessellations by means of image analysis methods. *J. Microsc.*, **186**, 198-209.

- Stoyan, D. (1990) Estimation of distances and variances in Bookstein's landmark model. *Biom. J.*, **32**, 843-849.
- Stoyan, D., W.S. Kendall and J. Mecke (1995) *Stochastic Geometry and its Applications*. J. Wiley & Sons, New York.
- Stoyan, D. and H. Stoyan (1980) Gedanken zur Entstehung der Säulenformen bei Basalten. *Zs. f. Geolog. Wissen.*, **8**, 1529-1537.
- Stoyan, D. and H. Stoyan (1992) *Fraktale, Formen, Punktfelder*. Akademie-Verlag, Berlin.
- Thiessen, A.H. (1911) Precipitation averages for large areas. *Monthly Weather Review*, **39**, 1082-1084.
- Underwood, E.E. (1970) *Quantitative Stereology*. Adison Wesley Publ. Comp., Reading.
- Van de Weygaert, R. (1994) Fragmenting the universe III. *Astron. Astrophys.*, **283**, 361-406.
- Vander Voort, G.F. (1982) Grain size measurement. In: *Practical Applications of Quantitative Metallography*. ASTM Special technical publication 839. Philadelphia, 85-131.
- Voronoi, G. (1908) Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques, deuxième memoire, recherches sur les paralleloèdres primitifs. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, **134**, 198-287.
- Weaire, D. (1974) Some remarks on the arrangement of grains in a polycrystal. *Metallography*, **7**, 157-160.
- Wigner, E. and F. Seitz (1933) On the constitution of metallic sodium. *Phys. Rev.*, **43**, 804-810.
- Williams, R. (1979) *Geometrical foundation of natural structures*. Dover Publications Inc., New York.
- Zuyev, S.A. (1992) Estimates of the Voronoi polygon's geometric characteristics. *Random Structures and Algorithms*, **3**, 149-162.

7 Dodatky

7.1 Seznam vybraných symbolů

$b(x_k, 1)$	koule jednotkového poloměru se středem v bodě x_k
B	omezená oblast \mathbb{R}^d
B_σ^d	d -rozměrný Booksteinův model
c	charakteristika velikosti shluku (v jednotkách střední vzdálenosti nejbližších sousedů v procesu rodičů)
D	průměr koule (uvnitř níž nebo na jejímž povrchu je generován shluk - viz str. 11)
$E_+^d(x_i, x_j)$	poloprostor ohraničený nadrovinou symetrie bodů x_i, x_j , který obsahuje bod x_i
f, f'	tvárové faktory cel: $f=6v/\pi w^3$ (3D), $f'=4\pi v'/s$ (2D)
$F(x)$	distribuční funkce
g	tvárový faktor cely: $g=6\pi^{1/2}vs^{-3/2}$ (3D)
I	jednotková matice
I_{d-k}	číselná intenzita $(d-k)$ -faset v jednotce objemu
L^d	d -rozměrná bodová mřížka
L'_A	intenzita hran indukované 2D teselace (střední délka hran na jednotkové ploše)
L_V	intenzita hran 3D teselace (střední délka hran v jednotce objemu)
$n_e (n'_e)$	počet hran 3D (2D) cely
n_f	počet stěn 3D cely
$n_v (n'_v)$	počet vrcholů 3D (2D) cely
p	obvod 3D cely, pravděpodobnost realizace uzlu Bernouliova procesu
P	bodový systém (množina generátorů teselace)
\mathbf{P}	pravděpodobnost
$rb(x_k, 1)$	koule poloměru r se středem v bodě x_k
R	poloměr koule (uvnitř níž nebo na jejímž povrchu je generován shluk - viz str. 11)
\mathbb{R}^d	d -rozměrný eukleidovský prostor
$s (s')$	povrch 3D (obvod 2D) cely
S_V	střední plocha hranic cel (zrn) v jednotce objemu
t	čas
$v (v')$	objem 3D (plocha 2D) cely
V_i	cela Voronoiovy teselace
$V_K(\Phi)$	pravděpodobnost existence dutiny K v bodovém procesu Φ
w	střední šířka (střední Feretův průměr) cely
W	omezená oblast \mathbb{R}^d (pozorovací okénko)
x_i	generátor cely $V_i (x_i \in P)$
∂K	hranice množiny K (např. $\partial b(0,1)$ je jednotková sféra se středem v počátku)
$\theta (\theta')$	náhodný dihedrální úhel v 3D (úhel hran v 2D) cele
Θ	průměrný dihedrální úhel cely
λ	intenzita bodového procesu (střední počet bodů v jednotce objemu)

λ_p	intenzita rodičovského procesu
$v_d(K)$	d -rozměrný obsah množiny K
ξ_k	vektor náhodného posunutí bodu bodového procesu (s nulovou střední hodnotou a variancí $\sigma^2 I$)
ρ	střední vzdálenost nejbližších sousedů bodového procesu
σ	sférická kontaktní vzdálenost, střední hodnota plochy projekce 3D cel na izotropní trs rovin, směrodatná odchylka náhodných posunutí ξ_k
Φ	bodový proces v \mathbb{R}^d

7.2 Často používané pojmy

<i>bodový proces</i>	posloupnost bodů v \mathbb{R}^d , která je prostá (žádné dva body nekoincidují) a má konečný průnik s libovolnou omezenou oblastí $B \subset \mathbb{R}^d$
<i>uzlů bodové mřížky</i>	pravidelná (zpravidla kubická nebo čtvercová) mřížka bodů
<i>Bernoulliův</i>	na bodové mřížce - nezávislá identicky rozložená pravděpodobnost realizace každého uzlu je $p \leq 1$
<i>Booksteinův</i>	na bodové mřížce (Booksteinův model na bodové mřížce) - uzly jsou vychýleny nezávislými identicky rozloženými náhodnými posunutími ξ_k majícími centrované d -rozměrné normální rozdělení s variancí $\sigma^2 I$
<i>s pevným jádrem</i>	(model s pevným jádrem) - vzdálenost sousedních bodů je zdola omezena
<i>shlukový</i>	do každého bodu výchozího (rodičovského) pole je umístěna konečná omezená náhodná bodová množina - shluk "dcer"
<i>Booleovský</i>	bodový proces rodičů je Poissonův bodový proces a shluky jsou nezávislé identicky rozložené
<i>mřížkový</i>	bodový proces rodičů je bodová mřížka, shluky zpravidla nezávislé identicky rozložené
<i>stacionární Poissonův</i>	definován na celém \mathbb{R}^d , počet bodů v libovolných disjunktních podoblastech je vzájemně nezávislý (limitní případ rovnoměrně náhodného rozmístění bodů v konečné oblasti, např. d -rozměrné kouli s $D \rightarrow \infty$) - přesně viz str.5
<i>fasety</i>	složky hranice cel dimenze $s = 0, \dots, d$ jsou s -fasety, (např. 0-fasety je vrchol, 1-fasety je hrana a d -fasety je cela samotná).
<i>shluk</i>	konečná, obvykle náhodná množina bodů (dcer)
<i>binomický</i>	počet dcer ve shluku je pevný
<i>globulární</i>	dcery jsou rozmístěny rovnoměrně náhodně v kouli
<i>Matérněv</i>	globulární poissonovské
<i>poissonovský</i>	počet dcer ve shluku je dán Poissonovým rozdělením
<i>pravidelný</i>	dcery jsou ve vrcholech pravidelných polytopů pevně či náhodně orientovaných
<i>sférický</i>	dcery jsou rozmístěny rovnoměrně náhodně na povrchu koule
<i>teselace</i>	rozdělení prostoru na systém disjunktních cel
<i>indukovaná</i>	teselace vzniklá řezem d -rozměrné teselace r -rovinou

- homogenní Johnsonova Mehlova* okamžik začátku růstu je Poissonův bodový proces na kladné poloose (za platnosti doplňující podmínky, že zárodek obsažený v nějakém již rostoucím zrně růst nezačne)
- konvexní* teselace, tvořená konvexními polytopy (např. Johnsonova-Mehlova teselace konvexní není)
- neúplná* stadium růstového modelu, kdy cely ještě nevyplňují celý prostor
- normální* každá s -faset je společná $(d-s+1)$ celám (d je dimenze teselace)
- pravidelná* všechny cely jsou translačně ekvivalentní
- regulární* průnik dvou sousedních s -faset je s' -faset dimenze $s' \leq s$
- Voronoi* viz str. 6, začátek odst. 1.2
- vzdálenost sférická kontaktní* $\sigma = \min(\|x - x_i\|, x_i \in P)$ pro libovolné $x_i \in \mathbb{R}^d$.